

MÔN TOÁN – MÃ CHẤM: T02b

PHƯƠNG TRÌNH HÀM QUA CÁC KÌ THI OLIMPIC TOÁN

CÁC KÍ HIỆU VÀ CỤM CHỮ CÁI VIẾT TẮT CỦA CHUYÊN ĐỀ

Kí hiệu	Tiếng Anh	Tiếng Việt
HSG		Học sinh giỏi
HSG QG		Học sinh giỏi quốc gia
IMO	International Mathematical Olympiad	Kì thi Olympic toán quốc tế
VMO	VietNam Mathematical Olympiad	Olympic toán học
THTT		Toán Học Tuổi Trẻ
IMO Shortlist	International Mathematical Olympiad Shortlisted	Tuyển tập các bài toán dự tuyển Olympic toán quốc tế
TST	Team Selection Test	Kì thi chọn đội tuyển
TST Viet Nam	Team Selection Test Viet Nam	Kì thi chọn đội tuyển Việt Nam
NMO	National Mathematical Olympiad	Kì thi Olympic toán quốc gia

PHƯƠNG TRÌNH HÀM QUA CÁC KÌ THI OLIMPIC TOÁN

Phần 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

1. Lý do chọn đề tài

Các bài toán phương trình hàm là một phần quan trọng của chuyên ngành toán đại số và giải tích và là một mảng khó trong chương trình toán THPT chuyên. Chính vì thế trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán quốc tế và khu vực, những bài toán về phương trình hàm thường hay được đề cập và thường được xem là những dạng toán khó, đòi hỏi tư duy và khả năng phán đoán cao và thuộc vào những câu phân loại của kì thi. Các em học sinh bậc Trung học phổ thông thường gặp một số khó khăn khi tiếp cận các dạng toán liên quan đến phương trình hàm, đặc biệt là kỹ năng ứng dụng một số dạng toán về phương trình hàm vào việc giải bài tập. Những học sinh mới bắt đầu làm quen phương trình hàm thường chưa hiểu tường tận tư tưởng cũng như phương pháp tiếp cận bài toán, đặc biệt là khâu vận dụng kiến thức đã biết cũng như giả thiết của bài toán vào giải toán trong những tình huống khác nhau. Để hiểu và vận dụng tốt một số phương pháp giải toán về phương trình hàm và vận dụng kiến thức kiến thức đã biết và giả thiết bài toán vào giải toán thì thông thường học sinh phải có kiến thức nền tảng tốt về đại số, số học, tổ hợp tương đối đầy đủ và chắc chắn trên tất cả các lĩnh vực của các ngành toán này. Việc nhận ra những tính chất đặc biệt của hàm số cần tìm là điều rất quan trọng từ đó định hướng cho công việc tìm nghiệm của chúng ta. Đó là một khó khăn rất lớn đối với giáo viên và học sinh khi giảng dạy và học tập phần phương trình hàm.

Trong các dạng toán về phương trình hàm thì dạng toán về phương trình hàm Cauchy, phương trình hàm có sử dụng tính chất số học, phương trình hàm sử dụng tính chất song ánh, toàn ánh và đơn ánh, bất phương trình hàm ... xuất hiện rất nhiều trong các kì thi học sinh giỏi. Các bài toán về phương trình hàm trong các kì thi học sinh giỏi thường khá hay và đặc sắc, thể hiện khả năng sáng tạo của học sinh. Qua cách giải các bài toán về phương trình hàm cho chúng ta đánh giá khá tốt về tư duy cũng như khả năng của các em học sinh. Tuy nhiên khó khăn lớn nhất của giáo viên khi dạy phần này là làm sao để học sinh hứng thú học và bắt đầu lời giải bài toán như thế nào, xuất phát từ đâu, do đó vấn đề đặt ra là cần trang bị cho các em những kiến thức gì? Cần bắt đầu từ những bài toán nào? Cần phân dạng các bài tập về phương trình hàm và những dấu hiệu

của các bài toán như thế nào thì dùng các kiến thức toán tương ứng? Với tất cả những khó khăn và thuận lợi trên chúng tôi chọn đề tài “phương trình hàm qua các kì thi olympic toán” để trao đổi và đưa ra một số dạng bài tập đặc trưng để góp phần thúc đẩy việc học tập và giảng dạy phân môn phương trình hàm trong trường phổ thông chuyên toán.

2. Mục đích nghiên cứu

Đề tài “phương trình hàm qua các kì thi olympic toán” được chọn để giới thiệu với các thầy cô giáo và các em học sinh những kinh nghiệm của chúng tôi khi giảng dạy chủ đề phương trình hàm trong chương trình THPT chuyên, và đồng thời thông qua đề tài này chúng tôi muốn nhấn mạnh tầm quan trọng của các bài toán phương trình hàm xuất hiện trong các kì thi Quốc tế, khu vực và Olympic quốc gia của một số nước. Các bài toán phương trình hàm thường là những bài tập khó đối với học sinh cũng như việc phân tích lời giải, định hướng các giải cho học sinh, các bài tập chúng tôi đưa ra đều là các đề thi Olympic Quốc tế, khu vực và một số nước có truyền thống về toán, trong các bài tập này chúng tôi có phân tích dấu hiệu của bài toán mà có thể sử dụng những nội dung kiến thức nào để giải quyết chúng.

Thông qua đề tài “phương trình hàm qua các kì thi olympic toán” chúng tôi cũng rất mong muốn nhận được góp ý trao đổi của các bạn đồng nghiệp, các bậc cha mẹ học sinh và các em học sinh. Chúng tôi mong muốn đề tài này góp một phần nhỏ để việc dạy phân phương trình hàm có hiệu quả nhất và giúp các em học sinh có khả năng vận dụng một số dạng toán về phương trình hàm vào giải các bài toán phương trình hàm trong các kì thi một cách tốt nhất.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Để đáp ứng yêu cầu về việc học tập và nghiên cứu cho học sinh trong ba năm học liên tiếp: 2013-2014, 2014-2015, 2015-2016, góp phần nâng cao số lượng và chất lượng HSG môn toán tại các kỳ thi: HSG vòng tỉnh, HSG trại hè Hùng Vương, HSG đồng bằng duyên hải bắc bộ, HSG QG lớp 12.

4. Đối tượng và khách thể nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là học sinh các lớp chuyên Toán 11, 12; đội tuyển ghép thi chọn HSG lớp 12 vòng tỉnh, đội tuyển HSG tham dự kỳ thi chọn HSG QG lớp 12 môn Toán học. Ngoài ra còn có thể là tài liệu tham khảo cho học sinh, giáo viên và phụ huynh học sinh có nhu cầu tìm hiểu về phương trình hàm.

5. Phạm vi nghiên cứu

- Về kiến thức: nghiên cứu dựa trên các nội dung kiến thức toán của phân môn đại số và giải tích trong giới hạn thi học sinh giỏi của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

- Về đối tượng: đề tài nghiên cứu dựa trên khả năng nhận thức cũng như năng lực tư duy của học sinh các lớp chuyên toán 10, 11 và chủ yếu là học sinh nòng cốt trong đội tuyển học sinh giỏi tỉnh dự thi quốc gia.

6. Phương pháp nghiên cứu

Trong chuyên đề “phương trình hàm qua các kì thi olympic toán” sử dụng các phương pháp nghiên cứu chủ yếu sau:

- Phương pháp nghiên cứu lí luận: Nghiên cứu các tài liệu chuyên về phương trình hàm kết hợp với các tài liệu liên quan đến đại số, giải tích, dãy số, ... và các tạp chí trong và ngoài nước; tài liệu từ Internet...
- Phương pháp trao đổi, tọa đàm (với giáo viên, học sinh các lớp chuyên toán).
- Phương pháp tổng kết kinh nghiệm.

7. Cấu trúc của chuyên đề

Chuyên đề ngoài các phần danh mục viết tắt, mục lục, tài liệu tham khảo thì chuyên đề bao gồm 3 phần chính như sau:

Phần 1. Đặt vấn đề

Phần 2. Nội dung

Phần 3. Kết luận và kiến nghị

Phần 2. NỘI DUNG

PHƯƠNG TRÌNH HÀM QUA CÁC KÌ THI OLIMPIC TOÁN

1. PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY

Trong kì thi học sinh giỏi quốc gia năm 2016 (bài số 5, ngày thi thứ 2) xuất hiện bài toán về phương trình hàm như sau:

(VMO 2016) Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

a) $f(1) = 2016$;

b) $f(x + y + f(y)) = f(x) + ay$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Đây là một bài toán rất hay về phương trình hàm. Để giải quyết bài toán này học sinh cần nắm chắc các kiến thức về phương trình hàm Cauchy, tính chất liên quan đến phương trình hàm Cauchy, hàm số toàn ánh và đơn ánh cũng như việc nhận ra những tính chất đặc biệt của hàm số đã cho. Qua tìm hiểu kĩ nội dung bài toán này chúng tôi nhận thấy bài toán có nội dung tương tự bài toán thi **Bulgaria TST 2003, Iran TST 2007, AMM 2000** và xuất hiện trong kì thi chọn đội tuyển toán quốc tế của Việt Nam năm 2004. Chúng sẽ bắt đầu từ bài toán sau.

1. **(Bulgaria TST 2003, Iran TST 2007, AMM 2000)** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x^2 + y + f(y)) = 2y + f(x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Phân tích lời giải

Thay $x = 0$ vào phương trình đã cho ta được $f(y + f(y)) = 2y + f(0)^2 \Rightarrow f$ là một toàn ánh suy ra tồn tại số a sao cho $f(a) = 0$. Đặt $b = f(0)$. Từ phương trình ban đầu thay x bởi $-x$ ta được

$$f(x^2 + y + f(y)) = 2y + f(-x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)^2 = f(-x)^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Từ (1) và $f(a) = 0 \Rightarrow f(-a) = 0$.

Thay $x = 0$ vào phương trình đã cho ta được $f(y + f(y)) = 2y + f(0)^2, \forall y \in \mathbb{R} \quad (2)$.

Trong (2) ta lần lượt thay $y = a$ và $y = -a$ ta được:

$$f(a + f(a)) = 2a + b^2 \Rightarrow 0 = 2a + b^2$$

$$f(-a + f(-a)) = -2a + b^2 \Rightarrow 0 = -2a + b^2$$

Từ hai đẳng thức trên ta được $a = b = 0$.

Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (3).

Hướng thứ nhất

Để sử dụng (3) ta sẽ thay $y = -\frac{f(x)^2}{2}$ vào phương trình đã cho ta được:

$$f\left(x^2 - \frac{f(x)^2}{2} + f\left(\frac{f(x)^2}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{f(x)^2}{2} + f\left(\frac{f(x)^2}{2}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

(điều này có được là do (3)).

Để sử dụng (4), ta sẽ thay y bởi $-\frac{f(y)^2}{2}$ vào phương trình ban đầu ta thu được:

$$f\left(x^2 - \frac{f(y)^2}{2} + f\left(\frac{f(y)^2}{2}\right)\right) = 2\left(-\frac{f(y)^2}{2}\right) + f(x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 - y^2) = f(x)^2 - f(y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5).$$

Ta sẽ sử dụng (5) để suy ra hàm số này cộng tính. Thật vậy, thay $y = 0$ vào (5) ta được: $f(x^2) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (6).

Từ (5) và (6) ta được $f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ suy ra

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \forall x, y \geq 0 \quad (7). \text{ Từ (7) thay } x = 0 \text{ ta được}$$

$$f(-y) = -f(y), \forall y \geq 0 \Rightarrow f \text{ là hàm số lẻ. Sử dụng đẳng thức (7) ta được:}$$

Nếu $x > 0, y > 0$ ta có: $f(x) = f(x + y - y) = f(x + y) - f(y) \Rightarrow$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Nếu $x > 0, y < 0$ ta có:

$$f(x + y) = f(x + (-y)) = f(x) - f(-y) = f(x) + f(y)$$

$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Nếu $x < 0, y < 0$ ta có: $f(x + y) = -f(-x - y) = -(f((-x) + (-y))) =$

$$-(f(-x) + f(-y)) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Từ các trường hợp trên, kết hợp với $f(0) = 0$ ta được:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (8).$$

Từ (6) ta được $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Từ đây xét

$$x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow f(x - y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y). \text{ Do đó}$$

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (9).$$

Từ (8) và (9) ta được $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó k hằng số.

Thử lại vào phương trình ban đầu ta được :

$$k(x^2 + y + ky) = 2y + k^2x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (k^2 + k)y = 2y + k^2x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = k^2 \\ k^2 + k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1. \text{ Vậy } f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hướng thứ hai

Với $f(0) = 0$ ta có

$$f(x^2) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(y + f(y)) = 2y, \forall y \in \mathbb{R} \quad (10)$$

Thay y bởi $y + f(y)$ vào (10) ta được:

$$f(y + f(y) + f(y + f(y))) = 2(y + f(y)), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(3y + f(y)) = 2(y + f(y)), \forall y \in \mathbb{R} \quad (11).$$

Mặt khác ta viết

$$\Leftrightarrow f(3y + f(y)) = f\left(\left(\sqrt{2y}\right)^2 + y + f(y)\right) = 2y + f\left(\sqrt{2y}\right)^2, \forall y \geq 0$$

Kết hợp với (11) ta được $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2y}\right)^2 = 2f(y), \forall y \geq 0$

$$\Leftrightarrow f(2y) = 2f(y), \forall y \geq 0 \quad (12).$$

Tiếp theo ta chứng minh f là hàm số lẻ. Thật vậy, với mỗi $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$2y = f(x^2) = f(x)^2. \text{ Khi đó}$$

$$0 = -2y + f(x)^2 = f(x^2 + (-y) + f(-y)) \Rightarrow (-y) + f(-y) = -x^2$$

$$\Rightarrow f(-x^2) = f((-y) + f(-y)) = -2y = -f(x^2) \Rightarrow f(-x^2) = -f(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f \text{ là hàm số lẻ. Từ (12) suy ra } f(2y) = 2f(y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (13).$$

Ta có $f(y + f(y)) = 2y, \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(y + f(y))^2 = 4y^2, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f\left((y + f(y))^2\right) = 4y^2, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(y^2 + 2yf(y) + f(y)^2) = 4y^2, \forall y \in \mathbb{R} \quad (14).$$

Chú ý với $y \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq 0 \Rightarrow yf(y) \geq 0$, với

$y < 0 \Rightarrow f(y) = -f(-y) < 0 \Rightarrow yf(y) > 0$. Do đó $yf(y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$, kết hợp với (14) ta được:

$$4y^2 = f\left(\left(\sqrt{2yf(y)}\right)^2 + y^2 + f(y^2)\right) = 2y^2 + f\left(\sqrt{2yf(y)}\right)^2, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 4y^2 = 2y^2 + f(2yf(y)), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = f(2yf(y)), \forall y \in \mathbb{R}, \text{ kết hợp với (13) ta được:}$$

$$y^2 = f(yf(y)), \forall y \in \mathbb{R} \quad (15).$$

Sử dụng (15) ta thay y bởi $x + f(x)$ thu được:

$$\begin{aligned} (x + f(x))^2 &= f\left(\left((x + f(x))f(x + f(x))\right)\right) = f\left((x + f(x))2x\right) \\ &= f(2x^2 + 2xf(x)) = 2f(x^2 + xf(x)) = 2f(f(xf(x)) + xf(x)) = 4xf(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x + f(x))^2 = 4xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x - f(x))^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại thấy thỏa mãn.}$$

Nhận xét. Đây có lẽ là nguồn gốc của các bài toán: **Bài 5 (VMO 2016)** và **bài 3 (Viet Nam TST 2004)**.

2. **(Viet Nam TST 2004)** Tìm tất cả các giá trị của a sao cho tồn tại duy nhất một hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + ay, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Phân tích lời giải

Cũng dựa theo ý tưởng bài 6, ta sẽ chỉ ra f là một toàn ánh. Thay $x = 0$ vào phương trình ban đầu ta được $f(y + f(y)) = f(0)^2 + ay, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đẳng thức này việc chỉ ra f là toàn ánh phụ thuộc vào việc so sánh a với số 0.

Nếu $a = 0$ ta thu được đẳng thức $f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$.

Ta nhận thấy phương trình (1) luôn có hai nghiệm là $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra giá trị $a = 0$ không thỏa mãn tồn tại duy nhất hàm số f . Do đó $a \neq 0$, kết hợp với $f(y + f(y)) = f(0)^2 + ay, \forall x, y \in \mathbb{R}$ suy ra f là một toàn ánh.

Do f là một toàn ánh suy ra tồn tại số b sao cho $f(b) = 0$. Đặt $c = f(0)$.

Từ phương trình ban đầu thay x bởi $-x$ ta được

$$f(x^2 + y + f(y)) = ay + f(-x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)^2 = f(-x)^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

$$\text{Từ (2) và } f(b) = 0 \Rightarrow f(-b) = 0.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào phương trình đã cho ta được } f(y + f(y)) = ay + f(0)^2, \forall y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Trong (2) ta lần lượt thay $y = b$ và $y = -b$ ta được:

$$f(b + f(b)) = ab + c^2 \Rightarrow 0 = ab + c^2$$

$$f(-b + f(-b)) = -ab + c^2 \Rightarrow 0 = -ab + c^2$$

$$\text{Từ hai đẳng thức trên ta được } b = c = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (4).$$

$$\text{Thay } y = 0 \text{ vào phương trình ban đầu ta được } f(x^2) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (5).$$

$$\text{Từ (5) thay } x = 1 \text{ ta được } f(1) = f(1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}, \text{ kết hợp với (4) ta được } f(1) = 1.$$

$$\text{Từ (5) thay } x = 2 \text{ ta được } f(4) = f(2)^2. \text{ Mặt khác ta viết}$$

$$f(4) = f((\sqrt{2})^2 + 1 + f(1)) = f(\sqrt{2})^2 + a = f(2) + a$$

$$f(2) = f((0)^2 + 1 + f(1)) = f(0)^2 + a = a.$$

$$\text{Từ các đẳng thức trên ta được } a^2 = 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}, \text{ kết hợp với } a \neq 0 \text{ ta được } a = 2. \text{ Do đó phương trình ban đầu trở thành}$$

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + 2y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Theo bài 6 ta được phương trình này có nghiệm duy nhất là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $a = 2$.

3. (VMO 2016) Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\text{c) } f(1) = 2016;$$

$$\text{d) } f(x + y + f(y)) = f(x) + ay \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Phân tích lời giải

Hướng thứ nhất

Nếu $a = 0$ thì ta có thể lấy $f(x) = 2016, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện của bài toán. Như vậy $a = 0$ thỏa mãn.

Nếu $a \neq 0$, từ điều kiện (b) ta chọn $x = -f(y)$ ta được

$$f(y) = f(-f(y)) + ay, \forall y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Từ (1) dễ thấy hàm số f là đơn ánh. Cũng từ (1), lấy $y = 0$ và sử dụng f là đơn ánh ta được $f(0) = 0$.

Trong (b) ta thay $x = 0$ ta được $f(y + f(y)) = ay, \forall y \in \mathbb{R} \quad (2)$.

Ta sẽ sử dụng (2) bằng cách thay y bởi $y + f(y)$ vào (b) ta được :

$$f(x + y + f(y) + f(y + f(y))) = f(x) + a(y + f(y)), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x + ay + y + f(y)) = f(x) + a(y + f(y)), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x + ay) + ay = f(x) + ay + af(y), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x + ay) = f(x) + af(y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Trong (3) ta thay $x = 0$ ta được $f(ay) = af(y), \forall y \in \mathbb{R}$. Từ đẳng thức này, kết hợp với (3) ta được $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4)$.

Thay $x = y = 1$ vào phương trình (b) và sử dụng (4) ta được:

$$f(2 + f(1)) = f(1) + a \Leftrightarrow a = f(2018) - f(1) = 2017f(1) = 2016.2017.$$

Ta lấy hàm số $f(x) = 2016x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $a = 0$ và $a = 2016.2017$.

Hướng thứ hai

Nếu $a = 0$ thì ta có thể lấy $f(x) = 2016, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện của bài toán. Như vậy $a = 0$ thỏa mãn.

Nếu $a \neq 0$, từ điều kiện (b) ta chọn $x = -f(y)$ ta được

$$f(y) = f(-f(y)) + ay, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ (1) dễ thấy hàm số f là đơn ánh. Cũng từ (1), lấy $y = 0$ và sử dụng f là đơn ánh ta được $f(0) = 0$. Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (5)$.

Từ phương trình ban đầu ta thay $y = -\frac{f(x)}{a}$ ta thu được đẳng thức

$$f\left(x - \frac{f(x)}{a} + f\left(-\frac{f(x)}{a}\right)\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ kết hợp với (5) ta được}$$

$$x - \frac{f(x)}{a} + f\left(-\frac{f(x)}{a}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(x)}{a} + f\left(-\frac{f(x)}{a}\right) = -x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (6).$$

Từ phương trình (b) ta thay y bởi $-\frac{f(y)}{a}$ ta được

$$f\left(x - \frac{f(y)}{a} + f\left(-\frac{f(y)}{a}\right)\right) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Kết hợp với (6) ta được

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (7).$$

Trong (7) ta thay $x = 0$ ta được $f(-y) = f(0) - f(y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (8).$

Với mọi $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x + y) = f(x - (-y)) = f(x) - f(-y) = f(x) + f(y)$$

$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (9).$$

Thay $x = y = 1$ vào phương trình (b) và sử dụng (9) ta được:

$$f(2 + f(1)) = f(1) + a \Leftrightarrow a = f(2018) - f(1) = 2017f(1) = 2016.2017.$$

Ta lấy hàm số $f(x) = 2016x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $a = 0$ và $a = 2016.2017$.

- 4. (USAJMO 2015)** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(t) = f(y) + f(z)$ với mọi số hữu tỉ $x < y < z < t$ và x, y, z, t theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Phân tích lời giải

Do x, y, z, t theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $x + t = y + z$, kết hợp với phương trình đã cho ta được $f(x) + f(y + z - x) = f(y) + f(z) \quad (1)$ với mọi $x < y < z$ và x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(0)+f(y+z)=f(y)+f(z)$ với mọi $0 < y < z$. Tiếp theo ta đặt $g(x)=f(x)-f(0)$ ta được:

$$g(y+z)=g(y)+g(z) \text{ với mọi } 0 < y < z \quad (2).$$

Rõ ràng giả thiết (2) giống với giả thiết của phương trình hàm Cauchy, tuy nhiên với điều kiện $0 < y < z$ thì việc xử lý phương trình (2) không còn đơn giản như phương trình hàm Cauchy.

Với số nguyên dương $n \geq 3$, ta sẽ tìm cách biểu diễn $g(n)$ theo

$$g(1), g(2). \text{ Ta có } g(3)=g(1)+g(2), g(4)=g(3)+g(1)=g(2)+2g(1),$$

tiếp theo bằng quy nạp ta được $g(n)=g(2)+(n-2)g(1)$ (3).

Lấy $2 < y < z$ là các số nguyên dương ta được $g(y)=g(2)+(y-2)g(1)$,

$$g(z)=g(2)+(z-2)g(1), g(y+z)=g(2)+(y+z-2)g(1) \text{ và thay vào (2)}$$

ta được: $g(2)+(y+z-2)g(1)=g(2)+(y-2)g(1)+g(2)+(z-2)g(1)$

$$\Leftrightarrow g(2)=2g(1).$$

Kết hợp với (3) ta được $g(n)=ng(1)$.

Để xác định được $g(x)$, trong đó x là số hữu tỉ ta cần tìm hệ thức giữa $g(nx)$ và $g(x)$, ở đây n là một số nguyên dương.

Đầu tiên ta sẽ tìm cách biểu diễn $g(nx)$ theo $g(x), g(2x)$. Ta có

$$g(3x)=g(x)+g(2x), g(4x)=g(3x)+g(x)=g(2x)+2g(x), \text{ tiếp theo}$$

bằng quy nạp ta được $g(nx)=g(2x)+(n-2)g(x)$ (4).

Lấy $2 < n < m$ là các số nguyên dương ta được

$$g(nx)=g(2x)+(n-2)g(x),$$

$$g(mx)=g(2x)+(m-2)g(x), g(nx+mx)=g(2x)+(m+n-2)g(x) \text{ và}$$

thay vào (2) ta được:

$$g(2x)+(m+n-2)g(x)=g(2x)+(n-2)g(x)+g(2x)+(m-2)g(x)$$

$$\Leftrightarrow g(2x)=2g(x).$$

Kết hợp với (4) ta được $g(nx)=ng(x)$ (5).

Từ (5) ta được với m, n là các số nguyên dương ta được

$$g(m)=g\left(n \cdot \frac{m}{n}\right)=ng\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow g\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}g(1) \Rightarrow g(x)=xg(1), \text{ với } x \text{ là một}$$

số hữu tỉ dương.

Phần còn lại ta sẽ đi tìm $g(x)$, với x là số hữu tỉ âm.

Do $f(x)+f(t)=f(y)+f(z) \Rightarrow g(x)+g(t)=g(y)+g(z)$ với mọi

$x < y < z < t$ lập thành cấp số cộng.

Với $x < 0$ bất kì ta xét cấp số cộng $x < 0 < z < t$ ta được

$$g(x) + g(t) = g(0) + g(z) \Rightarrow g(x) + tg(1) = g(0) + zg(1)$$

$$\Rightarrow g(x) = g(0) + zg(1) - tg(1) = xg(1)$$

$$\text{Do vậy } g(x) = xg(1), x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0)), x \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow f(x) = ax + b, x \in \mathbb{Q}; a, b \in \mathbb{Q}. \text{ Thử lại ta thấy thỏa mãn.}$$

5. (Zhautykov 2015) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Phân tích lời giải

Thay $y = 0$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x^3) = x^2 f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(x) = f(x^3) - f(0), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Tiếp theo ta sẽ tính $f(0)$ theo cách từ (1) thay $x = 1$ thu được

$$\Leftrightarrow f(1) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Kết hợp với (1) và phương trình ban đầu ta được

$$f(x^3 + y^3 + xy) = f(x^3) + f(y^3) + f(xy) - 2f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x^3 + y^3 + xy) = f(x^3) + f(y^3) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Thay $y = -x$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(-x^2) = x^2 f(x) + (-x)^2 f(-x) + f(-x^2), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(x) + (-x)^2 f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta có

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Trong (2) ta thay y bởi $-y$ và kết hợp với (3) ta thu được

$$f(x^3 - y^3 - xy) = f(x^3) + f(-y^3) + f(-xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x^3 - y^3 - xy) = f(x^3) - f(y^3) - f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Cộng từng vế của (2) và (4) ta được

$$f(x^3 + y^3 + xy) + f(x^3 - y^3 - xy) = 2f(x^3), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Đẳng thức (5) giúp ta định hướng đến chứng minh f là hàm cộng tính.

Cũng từ (5) để chứng minh hàm số f là hàm cộng tính ta sẽ chỉ ra với hai số thực $x, y \in \mathbb{R}$ tồn tại các số thực $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} x = u^3 + v^3 + uv \\ y = u^3 - v^3 - uv \end{cases}$$

Thật vậy

$$\begin{cases} x = u^3 + v^3 + uv \\ y = u^3 - v^3 - uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = \frac{x+y}{2} \\ y = u^3 - v^3 - uv \end{cases}$$

Đầu tiên ta chọn $u = \sqrt[3]{\frac{x+y}{2}}$, sau khi chọn được u , xét phương trình bậc ba sau $t^3 + ut + y - u^3 = 0$. Rõ ràng phương trình này luôn có ít nhất một nghiệm thực và gọi nghiệm đó là v suy ra

$$v^3 + uv + y - u^3 = 0 \Leftrightarrow y = u^3 - v^3 - uv$$

Do đó với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ tồn tại các số thực $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} x = u^3 + v^3 + uv \\ y = u^3 - v^3 - uv \end{cases}$$

Kết hợp với (5) ta được

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Trong (6) ta cho $y = 0$ thu được

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Từ (6) và (7) ta có đẳng thức sau

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (8).$$

Do $f(0) = 0$ nên từ (1) ta được đẳng thức sau

$$f(x^3) = x^2 f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Từ (8) và (9) ta sẽ xây dựng $f(x)$ theo hướng như sau:

$$f((x+1)^3 + (x-1)^3) = f(2x^3 + 6x) = f(2x^3) + f(6x) = 2f(x^3) + 6f(x)$$

$$= 2x^2 f(x) + 6f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f((x+1)^3 + (x-1)^3) = 2x^2 f(x) + 6f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

Mặt khác cũng theo (8) và (9) ta có

$$f((x+1)^3 + (x-1)^3) = f((x+1)^3) + f((x-1)^3) = (x+1)^2 f(x+1) + (x-1)^2 f(x-1)$$

$$= (x+1)^2 (f(x) + f(1)) + (x-1)^2 (f(x) - f(1))$$

$$= ((x+1)^2 + (x-1)^2) f(x) + ((x+1)^2 - (x-1)^2) f(1)$$

$$= (2x^2 + 2) f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f((x+1)^3 + (x-1)^3) = (2x^2 + 2) f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Từ (10) và (11) thu được đẳng thức

$$2x^2 f(x) + 6f(x) = (2x^2 + 2)f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4f(x) = 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{R} \text{ hay } f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ trong đó } a \text{ là hằng số thực.}$$

Thử lại vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

6. (India 2013) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x(1+y)) = f(x)(1+f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Phân tích lời giải

Trước tiên ta tính giá trị $f(0)$ bằng cách thay $x = y = 0$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(0) = f(0)(1+f(0)) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Nếu ta thay $x = 0$ hoặc $y = 0$ ta được đẳng thức luôn đúng. Để sử dụng kết quả $f(0) = 0$ ta sẽ thay $y = -1$ vào phương trình ban đầu

$$f(0) = f(x)(1+f(-1)), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x)(1+f(-1)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

TH1. Nếu $f(-1) \neq -1$ thì $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn.

TH2. Nếu $f(-1) = -1$

Thay $x = -1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(-y-1) = f(-1)(1+f(y)), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(-y-1) = -f(y)-1, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(y-1) = -f(-y)-1, \forall y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Để sử dụng (1) thì trong phương trình ban đầu ta thay y bởi $y-1$ ta được

$$f(xy) = f(x)(1+f(y-1)), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(xy) = f(x)(1-f(-y)-1), \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (do (1))}$$

$$\Leftrightarrow f(xy) = -f(x)f(-y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Thay $y = -1$ vào (2) ta được

$$f(-x) = -f(x)f(1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Đẳng thức (3) sẽ cho ta biết được tính chẵn lẻ của hàm số f . Để chỉ ra cụ thể tính chẵn lẻ của nó ta cần tìm giá trị của $f(1)$.

Thay $y = 2$ vào (1) ta được $f(1) = -f(-2)-1$, kết hợp với (3) ta được

$$f(1) = f(2)f(1)-1 \quad (4)$$

Thay $x = y = 1$ vào phương trình ban đầu ta được $f(2) = f(1)(1+f(1))$, kết hợp với (4) ta được

$$f(1) = f(1)(1 + f(1))f(1) - 1$$

$$\Leftrightarrow f(1) + 1 = f(1)(1 + f(1))f(1)$$

$$\Leftrightarrow (f(1) + 1)(f(1)^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

*) $f(1) = -1 \Rightarrow f(2) = f(1)(1 + f(1)) = 0$. Từ phương trình ban đầu ta thay $x = 2$ thu được

$$f(2(1 + y)) = f(2)(1 + f(y)) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(2(1 + y)) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ không thỏa mãn với } f(1) = -1.$$

*) $f(1) = 1$, kết hợp với (3) ta được $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đẳng thức này sử dụng (1), (2) ta thu được

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$f(y - 1) = f(y) - 1, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y + 1) = f(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Sử dụng (5), (6) và phương trình ban đầu ta được

$$f(x(y + 1)) = f(xy + x) = f(x)(1 + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(xy + x) = f(x)f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(xy + x) = f(xy) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Từ (7) ta sẽ chỉ ra f là hàm số cộng tính. Thật vậy, với mọi

$x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$, luôn tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $x = a, y = ab$. Từ đó ta có

$$f(x + y) = f(a + ab) = f(ab) + f(a) = f(x) + f(y)$$

$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad (8)$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta được

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Từ (5) và (9) ta được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm của bài toán là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. (India 2003) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Phân tích lời giải

Giả thiết của bài toán giúp ta liên hệ đến bài toán cơ bản: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm của bài toán này là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bây giờ ta sẽ tính một số giá trị đặc biệt. Cho $x = y = 0$ vào phương trình

$$\text{ban đầu ta được } f(0)^2 = 2f(0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}.$$

TH1. $f(0) = 2$

Thay $y = 0$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$f(x) + f(x)f(0) = f(0) + f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + 2f(x) = 2 + f(x) + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại ta thấy thỏa mãn.}$$

TH2. $f(0) = 0$

Nếu ta thay $x = 0$ hoặc $y = 0$ vào phương trình ban đầu ta thấy luôn đúng.

Do đó ta cần tính một vài giá trị đặc biệt khác. Nếu thay $x = y = 1$ ta được

$$f(2) + f(1)^2 = f(1) + 2f(1) \Leftrightarrow f(2) = 3f(1) - f(2), \text{ từ đây để tính được}$$

$$f(1) \text{ ta cần tính } f(2). \text{ Thay } x = y = 2 \text{ ta được}$$

$$f(4) + f(2)^2 = f(4) + 2f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } f(2) = 0 \Leftrightarrow 3f(1) - f(1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Với } f(2) = 2 \Leftrightarrow 3f(1) - f(1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}.$$

+) $f(2) = 2, f(1) = 2$, thay $x = 1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x+1) + f(x)f(1) = f(x) + f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó $f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn.

+) $f(2) = 0, f(1) = 3$, thay $x = 1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x+1) + f(x)f(1) = f(x) + f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) + f(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Thay $x = -1$ vào (1) ta được $f(-1) = 3$. Để sử dụng kết quả này trong phương trình ban đầu ta thay $x = -1$ được

$$f(x-1) + f(-1)f(x) = f(-x) + f(-1) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x-1) + 2f(x) = f(-x) + 3, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Từ (1) ta được $f(x) + f(x-1) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$, kết hợp với (2) ta được

$$3 - f(x) + 2f(x) = f(-x) + 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Để sử dụng (3) thì từ phương trình ban đầu ta thay y bởi $-y$ ta được

$$f(x-y) + f(x)f(-y) = f(-xy) + f(x) + f(-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x-y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Kết hợp với phương trình ban đầu ta thu được:

$$f(x+y) = f(x-y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Từ phương trình này thay $x = y$ ta được $f(2x) = f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ không thỏa mãn vì } f(1) = 3.$$

+) $f(2) = 0, f(1) = 0$, thay $x = 1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x+1) + f(x)f(1) = f(x) + f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-1) = 0.$$

Thay $y = -1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x-1) + f(x)f(-1) = f(-x) + f(x) + f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x-1) = f(-x) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2f(x-1) = 2f(-x) + 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2f(-x) + 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -2f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (4).$$

Trong (4) ta thay x bởi $-x$ ta được $f(-x) = -2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, kết hợp với

(4) ta được $f(x) = 4f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

+) $f(2) = 2, f(1) = 1$, thay $x = 1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x+1) + f(x)f(1) = f(x) + f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (5).$$

Để sử dụng (5) ta thay x bởi $x+1$ thu được đẳng thức

$$f(x+1+y) + f(x+1)f(y) = f((x+1)y) + f(x+1) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y+1) + (f(x)+1)f(y) = f(xy+y) + f(x)+1 + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y)+1 + f(x)f(y) + f(y) = f(xy+y) + f(x)+1 + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy+y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow f(xy) + f(x) + f(y) = f(xy+y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (do phương trình ban đầu)

$$\Leftrightarrow f(xy) + f(y) = f(xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (6).$$

Từ (6) ta thấy với mọi $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, tồn tại $x, y \in \mathbb{R} : a = xy, b = y$. Khi đó ta có $f(a+b) = f(xy+y) = f(xy) + f(y) = f(a) + f(b)$, kết hợp với $f(0) = 0$ nên ta thu được $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (7).

Từ (7) và phương trình ban đầu ta được $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (8).

Từ (7) và (8) ta được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là:

$$f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

8. (USA TST 2012) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y^2) = f(x) + |yf(y)|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Phân tích lời giải

Ta lấy $x=0 \Rightarrow f(y^2) = f(0) + |yf(y)|, \forall y \in \mathbb{R}$ (1).

Trong (1) ta thay y bởi $-y$ thu được $|yf(y)| = |-yf(-y)| = |yf(-y)|, \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f(-y)| = |f(y)|, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-y)^2 = f(y)^2, \forall y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Tiếp theo ta sẽ đi tìm mối liên hệ giữa $f(x)$ và $f(-x)$ sau đó kết hợp với (2) ta được $f(x)$.

Từ phương trình đã cho thay x bởi $-y^2$ ta được $f(0) = f(-y^2) + |yf(y)|$, kết hợp với (1) ta được $f(0) = f(-y^2) + f(y^2) - f(0)$ suy ra

$$2f(0) = f(-y^2) + f(y^2), \forall y \in \mathbb{R}. \text{ Từ đẳng thức này ta thu được hệ thức}$$

$$2f(0) = f(x) + f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Bây giờ từ (2) và (3) ta coi $f(x)$ và $f(-x)$ là hai ẩn, từ (3) ta được

$$f(-x) = 2f(0) - f(x) \text{ thay vào (2) ta được}$$

$$(2f(0) - f(x))^2 = (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4f(0)^2 - 4f(0)f(x) + f(x)^2 = (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4f(0)^2 - 4f(0)f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4f(0)(f(0) - f(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4).$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ (4) ta được $f(x) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ thay vào phương trình hàm ban đầu ta thu được $f(0) = f(0) + |yf(y)|, \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 = |yf(y)|, \forall y \in \mathbb{R} \text{ điều này không xảy ra suy ra } f(0) = 0.$$

Từ (1) và (3) ta được $f(y^2) = |yf(y)|, \forall y \in \mathbb{R}$ (5) và

$$f(-y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (6).$$

Từ (5), kết hợp với phương trình ban đầu ta được

$$f(x+y^2) = f(x) + f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ hay}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0 \quad (7).$$

Xét $x \in \mathbb{R}, y < 0$ ta có:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= -f(-x-y) = -f(-x+(-y)) = -(f(-x) + f(-y)) \\ &= -(-f(x) - f(y)) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Kết hợp với (7) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (8).$$

Từ (5) ta được $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \quad (9).$

Từ (8) và (9) ta được $f(x) = ax, x \in \mathbb{R}.$

Thử lại ta được $a \geq 0.$ Vậy $f(x) = ax, x \in \mathbb{R},$ trong đó a là hằng số không âm.

9. (India 2007) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(x)f(y) = (1+y)f(x) + (1+x)f(y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Phân tích lời giải

Đầu tiên ta thử tính giá trị $f(0)$ bằng cách thay $x = y = 0$ ta được

$$f(0) + f(0)^2 = 3f(0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

TH1. $f(0) = 2$, để sử dụng được $f(0) = 2$ thì trong phương trình ban đầu ta thay $y = 0$ thu được

$$f(x) + f(x)f(0) = f(x) + (1+x)f(0) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + 2f(x) = f(x) + 2(1+x) + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại thấy thỏa mãn.}$$

TH2. $f(0) = 0$, nếu ta thay $y = 0$ vào phương trình đã cho ta được đẳng thức $f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ luôn đúng. Do đó để xác định được hàm số f ta cần xác định thêm một số giá trị đặc biệt khác nữa.

Ta thay $x = 1, y = -1$ vào phương trình ba đầu ta được

$$f(0) + f(1)f(-1) = 2f(-1) + f(-1)$$

$$\Leftrightarrow f(1)f(-1) = 3f(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 3 \end{cases}.$$

+) $f(1) = 3$ để sử dụng được $f(1) = 3$ thì trong phương trình ban đầu ta thay $y = 1$ thu được

$$f(x+1) + f(x)f(1) = f(x) + (1+x)f(1) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) + 3f(x) = 2f(x) + 3(1+x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = 3(x+1), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ từ đẳng thức này ta được}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ thử lại thấy thỏa mãn.}$$

+) $f(-1) = 0$, thay $y = -1$ vào phương trình đã cho ta được

$$f(x-1) + f(x)f(-1) = (1+x)f(-1) + f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x-1) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Thay $x = -1$ vào (1) ta được $f(-2) = f(1)$. Tiếp theo thay $x = 1, y = -2$ vào phương trình ban đầu thu được

$$f(-1) + f(1)f(-2) = -f(1) + 2f(-2) + f(-2)$$

$$\Leftrightarrow f(1)f(1) = -f(1) + 2f(1) + f(1)$$

$$\Leftrightarrow f(1)^2 = 2f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

(a) $f(1) = 0$, thay $y = 1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x+1) + f(x)f(1) = (1+x)f(1) + 2f(x) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Trong (2) ta thay x bởi $x-1$ ta được $f(x) = 3f(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$, kết hợp với (1) ta được $f(x) = 3f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3).$

Trong (3) ta thay x bởi $-x$ ta được $f(-x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, kết hợp với (3) ta được $9f(x) = 3f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

(b) $f(1) = 2$, thay $y = 1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x+1) + f(x)f(1) = (1+x)f(1) + 2f(x) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) + 2f(x) = 2(1+x) + 2f(x) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Để sử dụng (4), từ phương trình ban đầu ta thay x bởi $x+1$ ta được

$$f(x+y+1) + f(x+1)f(y) = (1+y)f(x+1) + (2+x)f(y)$$

$$+ f(xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) + 2(x+y) + 2 + (f(x) + 2x + 2)f(y) = (1+y)(f(x) + 2x + 2) + (2+x)f(y) + f(xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) + f(x)f(y) + 2(x+y) + 2 + (2x+2)f(y) = (1+y)f(x)$$

$$+ (1+y)(2x+2) + (2+x)f(y) + f(xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Kết hợp với phương trình ban đầu ta được

$$(1+y)f(x) + (1+x)f(y) + f(xy) + 2(x+y) + 2 + (2x+2)f(y) = (1+y)f(x) + (1+y)(2x+2) + (2+x)f(y) + f(xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)f(y) + f(xy) = f(xy+y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5).$$

Ta nhận thấy nếu ta thay y bởi $\frac{1}{x}$ vào (5) thì ta được đẳng thức liên hệ giữa $f\left(\frac{1}{x}\right)$ và $f\left(\frac{1}{x}+1\right)$, hai số này liên hệ với nhau bởi (4). Từ đó ta sẽ suy ra được $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Với $x \neq 0$, trong (5) thay y bởi $\frac{1}{x}$ ta được

$$(2x+1)f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) = f\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2, \forall x \neq 0. \text{ Từ đẳng thức này kết hợp}$$

với (4) ta được

$$(2x+1)f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 = f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \cdot \frac{1}{x} + 2 + 2, \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \cdot \frac{1}{x} + 2, \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + x, \forall x \neq 0$, kết hợp với $f(0) = 0$ ta được

$$f(x) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại thấy thỏa mãn.}$$

Vậy bài toán có bốn nghiệm là

$$f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

10.(ELMO Shortlist 2014) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa

$$\text{mãn } f(x^2 + y) + 1 = f(x^2 + 1) + \frac{f(xy)}{f(x)}, \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ và } x^2 + y \neq 0.$$

Phân tích lời giải

Ta sẽ thay một vài giá trị đặc biệt của x, y vào phương trình đã cho:

$$\text{Với } x=1 \text{ ta được } f(1+y) + 1 = f(2) + \frac{f(y)}{f(1)} \quad (1).$$

$$\text{Thay } x \text{ bởi } -x \text{ ta được } f(x^2 + y) + 1 = f(x^2 + 1) + \frac{f(-xy)}{f(-x)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ và}$$

$$x^2 + y \neq 0 \quad (2).$$

Từ phương trình ban đầu và (2) ta được :

$$\frac{f(xy)}{f(x)} = \frac{f(-xy)}{f(-x)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ và } x^2 + y \neq 0 \quad (3).$$

Trong (3) ta thay $x=1$ ta được $f(-y) = \frac{f(-1)}{f(1)} f(y) = af(y), \forall y \neq -1, 0 \quad (4)$

Trong (4) thay $y=1$ ta được $f(1)^2 = f(-1)^2 \Leftrightarrow f(-1) = \pm f(1)$.

TH1. $f(-1) = f(1)$, theo (4) ta được $f(-y) = f(y), \forall y \neq 0 \quad (5)$.

Để sử dụng (5), từ phương trình ban đầu ta thay y bởi $-y$ ta được

$$f(x^2 - y) = f(x^2 + y), \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (6).$$

Từ đẳng thức (6) ta sẽ chỉ ra hàm số này là hàm số hằng.

Trong (6) thay $y = x^2 + 1$ ta được $f(-1) = f(2x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suy ra $f(x) = f(-1), \forall x \geq 1 \quad (7)$.

Như vậy để tìm $f(x)$ ta chỉ cần tìm nó với $0 < x < 1$, trong (6) ta sẽ chọn x sao cho $x^2 - y \in (0, 1)$ điều này hoàn toàn thực hiện được bằng cách lấy x, y thỏa mãn $y \geq 1, \sqrt{y} < x < \sqrt{y+1}$. Khi đó từ (6) và chú ý với điều kiện của $x, y \Rightarrow x^2 + y > 1$ ta được $f(x^2 - y) = f(-1) \Rightarrow f(x) = f(-1) \quad \forall x \in (0, 1) \quad (8)$.

Từ (7) và (8) ta được $f(x) = f(-1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hay $f(x) = a, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, trong đó a là hằng số khác 0. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

TH2. $f(-1) = -f(1)$, theo (4) ta được $f(-y) = -f(y), \forall y \neq 0 \quad (9)$.

Để sử dụng (9), từ phương trình ban đầu ta thay y bởi -1 ta được

$$f(x^2 - 1) + 1 = f(x^2 + 1) + \frac{f(-x)}{f(x)}, \forall x \neq -1, 0, 1$$

Kết hợp với (9) ta được $f(x^2 + 1) = f(x^2 - 1) + 2, \forall x \neq -1, 0, 1$. Từ đẳng thức này ta suy ra $f(y + 1) = f(y - 1) + 2, \forall y \neq 1, y > 0$ hay

$$f(y + 2) = f(y) + 2, \forall y > -1, y \neq 0 \quad (10).$$

Từ phương trình ban đầu ta thay $x=1$ ta được:

$$f(y + 1) + 1 = f(2) + \frac{f(y)}{f(1)}, \forall y \neq 0 \quad (11).$$

Từ (10) và (11) ta có:

$$f(y + 2) + 1 = f(2) + \frac{f(y + 1)}{f(1)} = f(2) + \left(\frac{f(y)}{f(1)} + f(2) - 1 \right) \cdot \frac{1}{f(1)}, \forall y > 0$$

$$\Rightarrow f(y+2)+1 = f(2) + \frac{f(y)}{f(1)^2} + \frac{f(2)}{f(1)} - \frac{1}{f(1)}, \forall y > 0$$

$$\Rightarrow f(y)+3 = f(2) + \frac{f(y)}{f(1)^2} + \frac{f(2)}{f(1)} - \frac{1}{f(1)}, \forall y > 0 \quad (12).$$

Từ (12) ta thấy nếu $f(1)^2 \neq 1 \Rightarrow f(y) = a, \forall y > 0$, trong đó a là hằng số khác 0. Kết hợp với (9) ta được $f(y) = a, \forall y \neq 0$ Thử lại thấy thỏa mãn.

Nếu $f(1)^2 = 1 \Rightarrow 3 = f(2) + \frac{f(2)}{f(1)} - \frac{1}{f(1)}$. Ta xét các trường hợp sau:

+) Nếu $f(1) = -1 \Rightarrow 3 = f(2) - f(2) + 1 \Rightarrow 3 = 1$ vô lí.

+) Nếu $f(1) = 1 \Rightarrow 3 = f(2) + f(2) - 1 \Rightarrow f(2) = 2$.

Kết hợp với (11) và bằng quy nạp ta chỉ ra được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (13).

Cũng từ (11) ta có $f(y+1) = f(y)+1, \forall y > 0$ (14).

Từ phương trình ban đầu ta thay y bởi $-y$:

$$f(x^2 - y) + 1 = f(x^2 + 1) + \frac{f(-xy)}{f(x)} = f(x^2 + 1) + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(xy)}{f(x)} = f(x^2 - y) + 1 - f(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 2 \frac{f(xy)}{f(x)} = f(x^2 + y) - f(x^2 - y), \forall x, y \neq 0; x^2 + y, x^2 - y \neq 0 \quad (15).$$

Theo (9) và (15) ta được :

$$f(x^2 + y) + 1 = f(x^2) + 1 + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow 2f(x^2 + y) = 2f(x^2) + 2 \frac{f(xy)}{f(x)} = 2f(x^2) + f(x^2 + y) - f(x^2 - y)$$

$$\Rightarrow f(x^2 + y) = 2f(x^2) - f(x^2 - y)$$

$$\Rightarrow f(x^2 + y) + f(x^2 - y) = 2f(x^2), \forall x, y \neq 0; x^2 + y, x^2 - y \neq 0 \quad (16).$$

$$\Rightarrow f(x+y) + f(x-y) = 2f(x), \forall x > y > 0$$

$$\Rightarrow f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \forall x > y > 0 \quad (17).$$

Từ (17) lần lượt thay $x=1, y=1$ ta được $f(x) + f(1) = 2f\left(\frac{x+1}{2}\right), \forall x > 0$

(18). Sử dụng (17), (18) ta được :

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{x+y+1}{2}\right) &= f(x) + f(y+1) \\
\Rightarrow f(x+y)+1 &= f(x) + f(y+1) = f(x) + f(y) + 1 \\
\Rightarrow f(x+y) &= f(x) + f(y) \quad \forall x > y > 0 \quad (19).
\end{aligned}$$

Từ phương trình ban đầu và (19) ta xét $x \neq 0, 1$ và $y = x$ ta được:

$$\begin{aligned}
f(x^2+x)+1 &= f(x^2+1) + \frac{f(x^2)}{f(x)} \\
\Rightarrow f(x^2) + f(x) + 1 &= f(x^2) + f(1) + \frac{f(x^2)}{f(x)} \Rightarrow f(x^2) = f(x)^2
\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f(x^2) = f(x)^2, \forall x > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0 \quad (20).$$

$$\text{Từ (19) và (20) ta được } f(x) = ax, \forall x > 0 \Rightarrow f(x) = ax, \forall x \neq 0.$$

$$\text{Thử lại vào phương trình ban đầu ta được } f(x) = x, \forall x \neq 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = a, \forall x \neq 0, \text{ trong đó } a \text{ là hằng số và } f(x) = x, \forall x \neq 0.$$

11.(Romania 2006) Giả sử $r, s \in \mathbb{Q}$ là hai số cho trước. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) = f(x+r) + y + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Phân tích lời giải

Đầu tiên ta thử thay một vài giá trị đặc biệt của x, y để tìm các hệ thức đặc biệt của hàm số f .

Thay $x = 0$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(f(y)) = f(r) + y + s, \forall y \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Tiếp theo để sử dụng được đẳng thức (1) thì trong phương trình ban đầu ta thay y bởi $f(y)$ thu được

$$\begin{aligned}
f(x + f(f(y))) &= f(x+r) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\
\Leftrightarrow f(x + f(r) + y + s) &= f(x+r) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\
\Leftrightarrow f(x+r+y+f(r)-r+s) &= f(x+r) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \\
\Rightarrow f(x+y+f(r)-r+s) &= f(x) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

Đặt $a = f(r) - r + s$ thay vào phương trình trên ta được

$$f(x+y+a) = f(x) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

Ta sẽ cố gắng chuyển (2) về phương trình hàm Cauchy. Nếu chuyển được về phương trình này, kết hợp với chỉ xét biến trên $\mathbb{Q}$ nên tính được $f(x), x \in \mathbb{Q}$.

Thay $y = 0$ vào phương trình (2) ta được

$$f(x+a) = f(x) + f(0) + s, \forall x \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được

$$f(x+y) + f(0) + s = f(x) + f(y) + s, \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) - f(0) = f(x) - f(0) + f(y) - f(0), \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Đặt $f(x) - f(0) = g(x), x \in \mathbb{Q}$ và thay vào phương trình trên được

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (4)$$

Từ (4) theo kết quả quen thuộc về phương trình hàm Cauchy ta được $g(x) = bx, \forall x \in \mathbb{Q}$, trong đó $b \in \mathbb{Q}$ là hằng số.

Từ cách xác định của hàm số g ta được

$$f(x) = bx + f(0) = bx + c, x \in \mathbb{Q}, c = f(0) \quad (5)$$

Từ (5) thay lại vào phương trình ban đầu ta được

$$b(x+by+c) + c = b(x+r) + y + s + c, \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow bx + b^2y + bc + c = bx + y + br + s + c, \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ bc + c = br + s + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = r + s \\ b = -1 \\ c = r - s \end{cases}$$

Vậy bài toán có hai nghiệm

$$f(x) = x + r + s, x \in \mathbb{Q} \text{ và } f(x) = -x + r - s, x \in \mathbb{Q}.$$

12.(USAMO 2002) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Phân tích lời giải

Thay $x = y$ vào phương trình ban đầu ta được $f(0) = 0$. Tiếp tục thay $y = 0$ ta thu được $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$.

Kết hợp (1) với phương trình ban đầu thu được

$$f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Phương trình (2) gợi cho chúng ta đưa hàm số f về dạng cộng tính.

Muốn vậy trước hết ta sẽ kiểm tra tính chẵn lẻ của hàm số này. Trong (2)

thay $x=0$ ta được $f(-y^2) = -f(y^2), \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-y) = -f(y), \forall y \geq 0$ suy ra $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (3).

Từ đẳng thức (2) ta có:

$$f(x-y) = f(x) - f(y), \forall x, y \geq 0 \quad (4)$$

Xét với $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta sẽ kiểm tra tính cộng tính của hàm số f dựa vào (3) và (4). Ta xét các trường hợp sau:

*) $x, y > 0$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x+y-y) = f(x+y) - f(y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \Rightarrow f(x+y) &= f(x) + f(y), \forall x, y > 0. \end{aligned}$$

*) $x > 0, y < 0$, ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x-(-y)) = f(x) - f(-y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \Rightarrow f(x+y) &= f(x) + f(y), \forall x > 0, y < 0. \end{aligned}$$

*) $x < 0, y < 0$, ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= -f(-x-y) = -f(-x) + f(y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \Rightarrow f(x+y) &= f(x) + f(y), \forall x < 0, y < 0. \end{aligned}$$

*) Nếu $x=0$ hoặc $y=0$ thì kết hợp với $f(0)=0$ ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Để xác định được hàm số f ta sẽ dựa vào (1) và (5) theo hướng như sau:

Xét $f(a^2)$, ta thấy $f(a^2)$ tính được ngay theo (1), ta sẽ chọn a sao cho có thể tính $f(a^2)$ theo (5). Muốn vậy ta lấy $a = x+1$. Khi đó ta có

$$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x) + f(1)), \forall x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

$$f((x+1)^2) = f(x^2 + 2x + 1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Từ (6) và (7) ta được

$$\begin{aligned} f(x^2) + 2f(x) + f(1) &= (x+1)(f(x) + f(1)), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow xf(x) + 2f(x) + f(1) &= (x+1)(f(x) + f(1)), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x) &= xf(1), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm của bài toán là $f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

13.(Balkan MO 2000, Argentina TST 2005) Tìm tất cả các hàm số

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Phân tích lời giải

Ta thay $x=0$ vào phương trình đã cho được $f(f(y)) = f(0)^2 + y, \forall y \in \mathbb{R}$
và thay $y=0$ vào phương trình đã cho ta được

$$f(xf(x) + f(0)) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Như vậy nhìn vào các đẳng thức trên ta sẽ đi tính giá trị của $f(0)$.

Từ $f(f(y)) = f(0)^2 + y, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là toàn ánh suy ra tồn tại a sao cho $f(a) = 0$. Từ phương trình ban đầu ta cho $x=a$ được

$$f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(0) = 0$.

Để sử dụng (2) trong phương trình ban đầu ta thay x bởi $f(x)$ ta được:

$$\begin{aligned} f(f(x)f(f(x)) + f(y)) &= f(f(x))^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(xf(x) + f(y)) &= x^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3). \end{aligned}$$

Từ (2) ta suy ra f là đơn ánh.

Trong đẳng thức (3) ta thay x bởi $-x$ ta được :

$$\begin{aligned} f(-xf(-x) + f(y)) &= (-x)^2 + y = x^2 + y = f(xf(x) + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow xf(x) + f(y) &= -xf(-x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow xf(x) &= -xf(-x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x) &= -f(-x), \forall x \neq 0, \text{ kết hợp với } f(0) = 0 \text{ ta được} \\ f(-x) &= -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (4). \end{aligned}$$

Từ (3) và phương trình ban đầu ta được :

$$\begin{aligned} f(xf(x) + f(y)) &= x^2 + y = f(x)^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x)^2 &= x^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (5). \end{aligned}$$

Từ (1) ta có:

$$f(xf(x)) = f(x)^2 = x^2 = f(f(x^2)) \Rightarrow f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (6).$$

Từ (2), (6) và phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{aligned} f(xf(x) + f(y)) &= f(x)^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(f(x^2) + f(y)) &= x^2 + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(f(x^2) + f(y)) &= f(f(x^2 + y)), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(x^2) + f(y) &= f(x^2 + y), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x) + f(y) &= f(x + y), \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R} \quad (7). \end{aligned}$$

Từ (4) và (7) ta sẽ chỉ ra hàm số f cộng tính. Thật vậy, với $x < 0, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f(x+y) = -f(-x-y) = -(f(-x) + f(-y)) = -(-f(x) - f(y)) \\ = f(x) + f(y), \text{ kết hợp với (7) ta được:}$$

$$f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (8).$$

Dựa vào (6) và (8) ta sẽ tính được $f(x)$ theo cách xét giá trị của $f((x+1)^2)$. Thật vậy, ta có

$$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x) + f(1))$$

$$f((x+1)^2) = f(x^2 + 2x + 1) = f(x^2) + 2f(x) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1)$$

So sánh hai đẳng thức này ta được $f(x) = f(1)x = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay lại phương trình ban đầu ta được $a = \pm 1$.

Vậy bài toán có hai nghiệm là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

14.(Iran 2002, India 2012) Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chúng minh rằng $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Phân tích lời giải

Đầu tiên ta xác định giá trị $f(0)$ bằng cách thay $x = y = 0$ vào phương trình đã cho thu được $f(0) = f(0) + f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Nếu thay

$$y = -x \text{ ta được } f(-x^2) = f(x) + f(-x) + f(-x^2), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Nếu ta thay $y = 0$ vào phương trình đã cho được $f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nhưng đẳng thức này luôn đúng. Nếu ta thay $y = 1$ vào phương trình đã cho được $f(2x+1) = 2f(x) + f(1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$.

Để sử dụng (2) thì trong phương trình đã cho ta thay x bởi $2x+1$ ta thu được đẳng thức

$$f(2x+1+y+(2x+1)y) = f(2x+1) + f(y) + f((2x+1)y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(2(x+y+xy)+1) = 2f(x) + f(1) + f(y) + f(2xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2f(x+y+xy) + f(1) = 2f(x) + f(1) + f(y) + f(2xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2f(x+y+xy) = 2f(x) + f(y) + f(2xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Từ phương trình này và kết hợp với phương trình ban đầu ta thu được

$$2f(x) + 2f(y) + 2f(xy) = 2f(x) + f(1) + f(2xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(y) + 2f(xy) = f(2xy+y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Để chỉ ra được hàm số f cộng tính thì từ (3) ta sẽ cố gắng chuyển $2f(xy)$ thành $f(2xy)$, muốn vậy ta cần so sánh $f(2x)$ và $2f(x)$. Thay $x = -\frac{1}{2}$ ta được

$$f(y) + 2f\left(-\frac{y}{2}\right) = f(-y + y), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(y) + 2f\left(-\frac{y}{2}\right) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(y) = -2f\left(-\frac{y}{2}\right), \forall y \in \mathbb{R}. \text{ Từ đẳng thức này ta thay } y \text{ bởi } -2x \text{ ta}$$

được $f(-2x) = -2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, kết hợp với (1) ta được:

$$f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) ta được $f(y) + f(2xy) = f(2xy + y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$.

Với mọi $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$, tồn tại hai số thực $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$x = a, y = 2ab$ (chẳng hạn lấy $a = x, b = \frac{y}{2x}$). Khi đó theo (5) ta có

$$f(x) + f(y) = f(a) + f(2ab) = f(2ab + a) = f(x + y)$$

$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad (6).$$

Từ (6) và $f(0) = 0$ ta được $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH HÀM LIÊN QUAN ĐẾN CÁC TÍNH CHẤT SỐ HỌC

Trong các kì thi Olympic toán trên thế giới những năm gần đây xuất hiện khá nhiều bài tập phương trình hàm mà trong lời giải cần sử dụng khá nhiều tính chất số học, tính chất nghiệm của phương trình nghiệm nguyên. Các dạng toán này thường khá đa dạng và điều quan trọng khi chúng ta giải dạng toán này là phải dự đoán được nghiệm để tìm ra tính chất đặc trưng cho hàm cần xác định. Muốn học tốt phần này trước hết học sinh phải được trang bị kiến thức nền tương đối đầy đủ về số học, biết vận dụng linh hoạt các tính chất số và biết cách phát hiện ra được những tính chất số học đặc trưng. Trong phần này chúng tôi xin nêu ra một số ví dụ tiêu biểu qua đó giúp học sinh có những kĩ năng và phương pháp nhất định khi tiếp cận những bài toán dạng này.

15.(USA JMO 2014) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y)), \forall x, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0.$$

Phân tích lời giải

Đây là phương trình hàm mà giả thiết rất phức tạp và rất khó để tìm ra phương án thay thế biến để tìm được đặc trưng của hàm. Từ giả thiết ta có thể nhận thấy ngay tính chất $x|f(x)^2, \forall x \neq 0 \Rightarrow p|f(p), \forall p$ nguyên tố (1). Tiếp theo ta thử thay $y=0$ vào phương trình đã cho ta được:

$$xf(2f(0)-x) = \frac{f(x)^2}{x} + f(0), \forall x \neq 0 \quad (2).$$

Nếu trong (2) ta thay $x=p$ nguyên tố và sử dụng (1) ta được $p|f(0)$. Do đó nếu chọn p là số đủ lớn thì $f(0)=0$. Như vậy ta được $f(0)=0$.

Từ (2) ta được $f(x)^2 = x^2 f(-x), \forall x \neq 0 \quad (3)$.

Bởi đẳng thức (3) nếu ta tìm được liên hệ giữa $f(-x)$ và $f(x)$ thì ta sẽ tìm được đặc trưng của $f(x)$.

Từ (3) ta có $f(x)^3 = x^2 f(x) f(-x), \forall x \neq 0$. Từ đẳng thức này thay x bởi $-x$ ta được $f(x)^3 = f(-x)^3, \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x) = f(-x), \forall x \neq 0$
 $\Rightarrow f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{Z} \quad (4)$ (do $f(0)=0$).

Sử dụng (3) và (4) ta được

$$f(x)^2 = x^2 f(x), \forall x \neq 0 \Rightarrow f(x)^2 = x^2 f(x), \forall x \in \mathbb{Z} \quad (5) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = x^2 \text{ hoặc } f(x) = 0.$$

$$\text{Từ (5) lấy } x=1 \Rightarrow f(1)^2 = f(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f(1)=1 \end{cases}.$$

+) Nếu $f(1)=0$, thay $y=1$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$xf(2f(1)-x) + f(2x-f(1)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(f(1)), \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow xf(-x) + f(2x) = \frac{f(x)^2}{x}, \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(x) + xf(2x) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \quad (\text{do (4)})$$

$$\Leftrightarrow xf(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \quad (\text{do (5)}).$$

$$\Leftrightarrow f(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0, \text{ kết hợp với } f(0)=0 \text{ ta được } f(x)=0, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

+) Nếu $f(1)=1$, thay $x=1$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$f(2f(y)-1) + f(2-f(y)) = \frac{f(1)^2}{1} + f(f(y)), \forall y \in \mathbb{Z} \quad (6).$$

Nếu tồn tại $y \neq 0$ sao cho $f(y)=0$ thì theo (6) ta được:

$$f(-1) + f(2) = \frac{f(1)^2}{1} + f(0) \Leftrightarrow f(2)=0.$$

Thay $y = 2$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$xf(2f(2)-x) + f(2x-f(2)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(f(2)), \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow xf(-x) + f(2x) = \frac{f(x)^2}{x} + f(0), \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(x) + xf(2x) = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow xf(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \text{ (do (5)).}$$

$$\Leftrightarrow f(2x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0, \text{ kết hợp với } f(0) = 0 \text{ ta được } f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$$

vô lí vì $f(1) = 1$. Do đó trong trường hợp này $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Vậy bài toán có hai nghiệm $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ và $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{Z}$. Thử lại thấy cả hai đều thỏa mãn.

- 16.(USA MO 2012, Balkan MO 2012)** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(n!) = (f(n))!$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $m-n \mid f(m) - f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$.

Phân tích lời giải

Tính chất $m-n \mid f(m) - f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$ gợi cho ta thấy f có tính chất giống một đa thức. Như vậy ta sẽ xét các trường hợp sau:

TH1. Nếu f là hàm số hằng và $f(n) = a, \forall n \in \mathbb{N}^*$, trong đó a là một số nguyên dương cho trước. Khi đó theo giả thiết đầu tiên ta được:

$a = a!$ đẳng thức này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a \in \{1, 2\}$. Thử lại thấy thỏa mãn suy ra có hai hàm thỏa mãn là $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $f(n) = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

TH2. Nếu f không phải hàm số hằng ta dự đoán trong trường hợp này $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Trước hết ta chứng minh $n \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta lấy hai số nguyên dương u, v sao cho $u \mid v$, để sử dụng giả thiết đã cho ta lấy biến nguyên dương n sao cho $n > v$ suy ra $u \mid (n! - v), n! > v \Rightarrow (n! - v) \mid (f(n!) - f(v)) \Rightarrow (n! - v) \mid (f(n)! - f(v)) \Rightarrow u \mid (f(n)! - f(v))$ (1).

Nếu từ (1) ta có thể chọn $n > v$ sao cho $f(n) > u$ thì từ (1) suy ra $u \mid f(v)$, từ kết quả này nếu lấy $u = v \Rightarrow u \mid f(u)$ hay ta có $n \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy ta cần chỉ ra tồn tại $n > v$ sao cho $f(n) > u$. Thật vậy, giả sử ngược lại ta có $f(n) \leq u, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > v \Rightarrow$ tồn tại số nguyên dương $a \leq u$ sao cho $f(n) = a$ tại vô hạn số nguyên dương $n > v$.

Theo giả thiết ta có với mỗi số nguyên dương $m \neq n \Rightarrow m-n \mid f(m) - f(n)$

$$\Rightarrow m-n \mid f(m)-a \quad (2).$$

Do f không phải hàm số hằng nên ta có thể chọn được số nguyên dương m sao cho $f(m)-a \neq 0$. Do đó từ (2) suy ra có vô hạn số nguyên là ước của $f(m)-a \neq 0$ điều này mâu thuẫn suy ra luôn tồn tại số nguyên dương $n > v$ sao cho $f(n) > u$. Do vậy theo lí luận ở trên ta thu được $n \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3).

Theo (3) và giả thiết ta có $2 \mid f(2) \Rightarrow 2 \mid f(2!) \Rightarrow 2 \mid f(2)! \Rightarrow f(2) = 2$.

Nếu $f(3) > 3 \Rightarrow f(3) \geq 4 \Rightarrow f(3!) = f(3)! \geq 4 \Rightarrow f(3!) - f(2) = f(3!) - 2$

không chia hết cho 4. Mặt khác theo giả thiết $3! - 2 \mid f(3!) - f(2) \Rightarrow$

$4 \mid f(3!) - 2$ vô lí suy ra $f(3) \leq 3$. Theo (3) ta lại có $f(3) \geq 3 \Rightarrow f(3) = 3$.

$f(6) = f(3!) = (f(3))! = 3! = 6 \Rightarrow 6! = f(6)! = f(6!) \Rightarrow f(720) = 720 \dots$

Cứ tiếp tục như vậy ta có vô hạn số nguyên dương n sao cho $f(n) = n$.

Đây là kết quả rất quan trọng để ta chỉ ra được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với mỗi số nguyên dương m , kết hợp với kết quả ở trên thì tồn tại vô hạn số nguyên dương $n > m$ sao cho $f(n) = n$.

Theo giả thiết ta có

$$m-n \mid f(m) - f(n) \Rightarrow m-n \mid f(m) - n$$

$$m-n \mid f(m) - m + m - n \Rightarrow m-n \mid f(m) - m$$

$\Rightarrow m-n \mid f(m) - m$ với vô hạn số nguyên dương $n > m$. Điều này chỉ xảy ra khi $f(m) = m$. Do đó $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy các nghiệm của bài toán là $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $f(n) = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

17.(IRAN 2011) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $af(a) + bf(b) + 2ab$ là số chính phương với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Phân tích lời giải

Với giả thiết $af(a) + bf(b) + 2ab$ là số chính phương với mọi

$a, b \in \mathbb{N}^*$ nên ta dự đoán $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Với hàm số $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

ta sẽ có $nf(n)$ là số chính phương $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và các tính chất đặc trưng như nếu p là một số nguyên tố sao cho $p \mid f(n)$ thì $p \mid n$,

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots$$

Với giả thiết của bài toán ta sẽ đi chứng minh hai kết quả sau:

Bổ đề 1. $nf(n)$ là số chính phương $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh. Giả sử tồn tại $c \in \mathbb{N}^*$ sao cho $cf(c)$ không là số chính phương. Khi đó tồn tại số nguyên tố p sao cho $\nu_p(cf(c)) = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Chọn d là số nguyên dương thỏa mãn $\nu_p(d) > 2k+1$ suy ra

$$\nu_p(cf(c) + df(d) + 2cd) = 2k+1$$

Do đó $cf(c) + df(d) + 2cd$ không là số chính phương. Do vậy bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề 2. Nếu p là số nguyên tố lẻ, $p \mid f(n), n \in \mathbb{N}^*$ thì $p \mid n$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương c sao cho $p \mid f(c)$ nhưng p không là ước của c .

Chọn số nguyên dương d sao cho $\nu_p(d) = 1$, kết hợp với $df(d)$ là số chính phương nên $p^2 \mid df(d)$. Do đó ta có

$$\begin{cases} p \mid cf(c) + df(d) + 2cd \\ p \mid 2cd, 2cd \not\equiv 0 \pmod{p^2} \\ cf(c) + df(d) + 2cd \not\equiv 0 \pmod{p^2} \end{cases}$$

Điều này không xảy ra vì $cf(c) + df(d) + 2cd$ là một số chính phương. Do đó bổ đề 2 được chứng minh.

Đầu tiên ta tính $f(1)$, ta có $1.f(1) + 1.f(1) + 2.1.1 = 2f(1) + 2$ là số chính phương nên tồn tại số nguyên dương u sao cho $2f(1) + 2 = u^2 \Rightarrow u:2 \Rightarrow u = 2t \Rightarrow f(1) + 1 = 2t^2 \quad (1)$.

Nếu $f(1)$ là số chẵn thì mâu thuẫn với (1) suy ra $f(1)$ là số lẻ. Giả sử $f(1)$ có ước nguyên tố lẻ là p , theo bổ đề 2 ta được $p \mid 1$ vô lí. Do đó $f(1)$ là số lẻ và không có ước nguyên tố lẻ suy ra $f(1) = 1$.

Thay $a = 2, b = 1$ vào điều kiện ban đầu ta được

$2f(2) + 1f(1) + 2.2.1$ là số chính phương hay tồn tại số nguyên dương u sao cho

$$2f(2) + 5 = u^2 \quad (2)$$

Theo bổ đề 1 ta được $2f(2) = v^2$, trong đó v là số nguyên dương. Thay vào (2) thu được

$$v^2 + 5 = u^2 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 2$$

Sử dụng phương pháp quy nạp ta được $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

18.(IMO Shortlisted 2010) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn tính chất $(f(m)+n)(m+f(n))$ là số chính phương với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Phân tích lời giải

Ta dự đoán nghiệm của bài toán là $f(n) = n + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$, trong đó c là hằng số tự nhiên. Với hàm số $f(n) = n + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta dự đoán một số tính chất đặc trưng như nếu p là một số nguyên tố sao cho $p \mid f(a) - f(b)$ thì $p \mid a - b$, $|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Với giả thiết của bài toán này ta dự đoán tính chất nếu p là một số nguyên tố sao cho $p \mid f(a) - f(b)$ thì $p \mid a - b$.

Bổ đề. Nếu $p \mid f(k) - f(l)$ với p là số nguyên tố và $k, l \in \mathbb{N}^*$ thì $p \mid k - l$.

Chứng minh.

Ý tưởng để chứng minh bổ đề này là chọn số nguyên dương n sao cho $f(n) + k$ và $f(n) + l$ cùng chia hết cho p . Từ đó suy ra $p \mid k - l$.

TH1. $p^2 \mid f(k) - f(l)$, đặt $f(l) = f(k) + p^2 a, a \in \mathbb{Z}$.

Chọn $n = pD - f(k)$ (D chọn sau) suy ra $n + f(k) = pD$; p , tiếp theo ta xét $n + f(l) = pD + f(l) - f(k) = p(D + pa) \Rightarrow n + f(l) \vdots p$.

Do giả thiết $(f(k)+l)(k+f(l))$ là số chính phương nên ta cần chọn D sao cho $f(n) + k$ và $f(n) + l$ cùng chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2 . Muốn vậy ta sẽ chọn D như sau

Lấy D đủ lớn sao cho D không chia hết cho p . Khi đó ta có

$$\begin{cases} n + f(k) \not\vdots p^2 \\ n + f(k) \vdots p \\ (n + f(k))(k + f(n)) = t^2 \end{cases} \Rightarrow k + f(n) \vdots p \quad (1)$$

$$\begin{cases} n + f(l) \not\vdots p^2 \\ n + f(l) \vdots p \\ (n + f(l))(l + f(n)) = h^2 \end{cases} \Rightarrow l + f(n) \vdots p \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $p \mid k - l$.

TH2. $p \mid f(k) - f(l)$ và $f(k) - f(l)$ không chia hết cho p^2 .

Chọn D sao cho $n = p^3 D - f(k)$ và D không chia hết cho p . Khi đó ta được:

$$n + f(k) = p^3 D$$

$n + f(l) = p^3 D + f(l) - f(k) \equiv 0 \pmod{p}$ và $n + f(l)$ không chia hết cho p^2 .

Mặt khác $(n + f(l))(l + f(n))$ và $(n + f(k))(k + f(n))$ là các số chính phương nên:

$$\begin{cases} k + f(n) \equiv 0 \pmod{p} \\ l + f(n) \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow k - l \equiv 0 \pmod{p}$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán ta thấy nếu $f(k) = f(l)$ thì với số nguyên tố đủ lớn $p > \max\{k, l\}$ theo bổ đề ta được $p | k - l$, điều này chỉ xảy ra khi $k = l$.

Nếu tồn tại số nguyên tố p sao cho $p | f(n+1) - f(n)$ thì theo bổ đề ta được $p | n+1 - n \Rightarrow p | 1$ vô lí. Vậy $|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3).

Từ (3) và giả thiết ta cần chỉ ra $f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Nhận thấy nếu một trong hai đẳng thức trên không xảy ra thì tồn tại một số nguyên dương k sao cho $f(k+1) - f(k) = 1$ và $f(k+2) - f(k+1) = -1$, cộng từng vế hai đẳng thức này ta được $f(k+2) - f(k) = 0 \Leftrightarrow f(k+2) = f(k) \Leftrightarrow k+2 = k$ vô lí. Do đó ta được

$$f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ hoặc } f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

) $f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^ \Rightarrow f(n+1) < f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ vô lí.

) $f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^ \Rightarrow f(n) = n - 1 + f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $f(n) = n + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$, trong đó c là một hằng số nguyên không âm. Thử lại thấy thỏa mãn.

19.(IMO Shortlisted 2007, Germany TST 2008) Tìm tất cả các hàm toàn ánh $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên tố p , $p | f(m+n)$ khi và chỉ khi $p | f(m) + f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Phân tích lời giải

Với mỗi số nguyên tố p . Gọi d là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $p | f(d)$.

Bổ đề 1. $p \mid f(n) \Rightarrow d \mid n$

Thật vậy, $p \mid f(d) \Rightarrow p \mid f(d) + f(d) \Rightarrow p \mid f(2d)$. Bằng quy nạp ta được $p \mid f(kd)$ với mọi số nguyên dương k .

Lấy n chia cho d được thương là q và dư r . Khi đó nếu $r > 0$, kết hợp với $p \mid f(qd), p \mid f(qd+r) \Rightarrow p \mid f(r)$ vô lí vì $r < d$ suy ra $r = 0$ hay $d \mid n$.

Bổ đề 2. $m \equiv n \pmod{p} \Leftrightarrow f(m) \equiv f(n) \pmod{p}$

Nếu $f(m) \equiv f(n) \pmod{p}$, ta lấy k sao cho $k+m \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow p \mid f(k+m) \Rightarrow p \mid f(k) + f(m), p \mid f(n) - f(m) \Rightarrow p \mid f(k) + f(n) \Rightarrow p \mid f(k+n) \Rightarrow d \mid k+n \Rightarrow d \mid m-n$.

Tương tự ta được nếu $m \equiv n \pmod{d} \Rightarrow f(m) \equiv f(n) \pmod{p}$.

Ta có $\{f(1), f(2), \dots, f(d)\}$ đôi một khác nhau theo $\pmod{p} \Rightarrow d \leq p$.

Xét $\{1, 2, \dots, p\}$ tồn tại các số $x_i, i=1, 2, \dots, p$ sao cho

$$f(x_i) = i + pt_i \Rightarrow f(x_i) \equiv i \pmod{p} \Rightarrow f(x_i) \not\equiv f(x_j) \pmod{p} \Rightarrow x_i \not\equiv x_j \pmod{d}$$

$x_1, x_2, \dots, x_p$ đôi một phân biệt theo $\pmod{d} \Rightarrow p \leq d$ suy ra $d = p$. Do đó bổ đề 2 được chứng minh.

Nếu $f(1) > 1 \Rightarrow$ tồn tại số nguyên tố $p \mid f(1) \Rightarrow p \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Lấy số nguyên tố $q > p$, kết hợp với f là toàn ánh nên tồn tại số nguyên dương n sao cho $q = f(n) : p$ vô lí suy ra $f(1) = 1$.

Nếu $f(2) = 1 \Rightarrow$ lấy số nguyên tố $p \Rightarrow p \mid f(2) - f(1) \Rightarrow p \mid 2 - 1$ vô lí. Suy ra $f(2) \geq 2$. Nếu $f(2) > 2 \Rightarrow f(2) - f(1) \geq 2 \Rightarrow$ tồn tại số nguyên tố p sao cho $p \mid f(2) - f(1) \Rightarrow p \mid 2 - 1$ vô lí. Do đó $f(2) = 2$.

Giả sử $f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(n-1) = n-1$. Ta sẽ chứng minh $f(n) = n$.

Nếu $f(n) \leq n-1$ suy ra tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sao cho $f(n) = j = f(j)$. Chọn số nguyên tố đủ lớn $p \mid f(n) - f(j) \Rightarrow p \mid n - j$ vô lí. Do đó $f(n) \geq n$. Nếu $f(n) > n \Rightarrow f(n) \geq n+1 \Rightarrow f(n) - f(n-1) \geq 2$ vô lí. Vậy $f(n) = n$.

Thử lại ta thấy hàm $f(n) = n, n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện. Do đó $f(n) = n, n \in \mathbb{N}^*$.

20.(Iran TST 2008) Cho k là một số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Phân tích lời giải

Ta thử tính một số giá trị đặc biệt như $f(1), f(2)$. Thay $m=n=1$ vào điều kiện ban đầu thu được $2f(1) \mid 2^k \Leftrightarrow f(1) \mid 2^{k-1}$. Tiếp theo $m=2, n=1$ vào điều kiện ban đầu thu được $f(2) + f(1) \mid 3^k$. Từ điều kiện này suy ra $f(2), f(1)$ khác tính chẵn, lẻ. Nếu $f(2)$ chẵn thì $f(1)$ lẻ, kết hợp với điều kiện $f(1) \mid 2^{k-1}$ ta được $f(1)=1$. Nếu $f(2)$ lẻ, thay $m=n=2$ vào điều kiện ban đầu ta được $f(2) + f(2) \mid 4^k \Leftrightarrow 2f(2) \mid 2^{2k} \Leftrightarrow f(2) \mid 2^{2k-1}$, kết hợp với $f(2)$ lẻ nên $f(2)=1$. Tiếp theo thay $m=n=4$ vào điều kiện ban đầu ta được $f(4) + f(4) \mid 8^k \Leftrightarrow f(4) \mid 2^{3k-1}$; thay $m=3, n=2$ vào điều kiện ban đầu ta được $f(3) + f(2) \mid 5^k \Leftrightarrow f(3) + 1 \mid 5^k \Rightarrow f(3)$ chẵn. Tiếp tục thay $m=3, n=4$ vào điều kiện ban đầu ta được $f(3) + f(4) \mid 7^k \Leftrightarrow f(3) + f(4) \mid 7^k \Rightarrow f(4)$ lẻ suy ra $f(4)=1$. Theo lập luận như vậy việc tính được $f(1)$ là tương đối khó khăn. Như vậy ta cần đi theo hướng làm khác.

Đầu tiên ta dễ nhận thấy hàm số cần tìm là $f(n)=n, n \in \mathbb{N}^*$. Nếu đây là hàm số duy nhất thì ta có thể dự đoán những tính chất đặc biệt của hàm số này chẳng hạn như nếu p là một số nguyên tố sao cho $p \mid f(n)$ thì $p \mid n$, $|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, f là hàm số đơn ánh... Ta cần tìm ra một đẳng thức liên hệ của hàm số f . Do đó ta sẽ đi chứng minh tính chất $|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Để chứng minh tính chất này ta thường làm theo hướng: giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $|f(n+1) - f(n)| > 1 \Rightarrow$ tồn tại số nguyên tố $p \mid (f(n+1) - f(n))$ (1).

Ta tìm mối liên hệ giữa $f(n+1), f(n)$. Từ điều kiện ban đầu ta có

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \text{ và } f(m) + f(n+1) \mid (m+n+1)^k, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ hai điều kiện trên suy ra $(f(m) + f(n), f(m) + f(n+1)) = 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $(f(m) + f(n), f(m) + f(n+1) - f(m) - f(n)) = 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow (f(m) + f(n), f(n+1) - f(n)) = 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ (2).

Kết hợp (1) và (2) nếu ta chọn được m sao cho $p \mid f(m) + f(n)$ thì ta có điều mâu thuẫn ngay. Việc chọn này khá đơn giản, lấy $m = p^\alpha - n$, với α đủ lớn thì theo điều kiện ban đầu ta được

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k \Rightarrow f(m) + f(n) \mid p^{\alpha k}$$

Kết hợp với $f(m) + f(n) > 1 \Rightarrow p \mid f(m) + f(n)$. Từ điều này và (1), (2) mâu thuẫn suy ra

$$|f(n+1) - f(n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3)$$

Từ (3) và giả thiết ta cần chỉ ra $f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Nhận thấy nếu một trong hai đẳng thức trên không xảy ra thì tồn tại một số nguyên dương k sao cho $f(k+1) - f(k) = 1$ và $f(k+2) - f(k+1) = -1$, cộng từng vế hai đẳng thức này ta được $f(k+2) - f(k) = 0 \Leftrightarrow f(k+2) = f(k)$. Ta đang cần chỉ ra điều này không đúng, muốn vậy ta nghĩ đến chứng minh hàm số f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại hai số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $f(a) = f(b)$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} f(a) + f(x) \mid (a+x)^k \\ f(b) + f(x) \mid (b+x)^k \end{cases}, \forall x \in \mathbb{N}^* \quad (4)$$

Do $a \neq b$ nên tồn tại số nguyên dương x sao cho $(a+x, b+x) = 1$ (điều này thực hiện được vì $(a+x, b+x) = (a+x, a+x-b-x) = (a+x, a-b)$, từ đây ta chỉ cần lấy x sao cho $a+x$ là số nguyên tố đủ lớn).

Từ (4) ta suy ra

$$f(a) + f(x) \mid ((a+x)^k, (b+x)^k) = 1, \text{ vô lí vì } f(a) + f(x) > 1.$$

Do đó hàm số f là một đơn ánh. Từ phân tích ở trên ta được

$$f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ hoặc } f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

TH1. $f(n+1) - f(n) = -1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n+1) < f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ vô lí.

TH2. $f(n+1) - f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = n - 1 + f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thử vào điều kiện ban đầu ta được

$$m+n-2+2f(1) \mid (m+n)^k, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (5)$$

Từ (5) lần lượt cho $m=n=1$ và $m=2, n=1$ và $m=n=2$ thu được

$$\begin{cases} 2f(1) \mid 2^k \\ 1+2f(1) \mid 3^k \\ 2+2f(1) \mid 4^k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) \mid 2^{k-1} \\ 1+2f(1) \mid 3^k \\ 1+f(1) \mid 2^{2k-1} \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1$$

Do đó $f(n) = n$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm của bài toán là $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

21.(APMO 2015) Cho $S = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Hỏi có tồn tại hàm số $f: S \rightarrow S$ thỏa mãn điều kiện $f(a)f(b) = f(a^2b^2), \forall a, b \in S, a \neq b$ không?

Phân tích lời giải

Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ tìm tính chất đặc biệt của hàm số f . Xét hai biểu thức sau $f(a)f(d)f(c), f(a)f(b)f(c)$.

Ta có $f(a)f(d)f(c) = f(a^2d^2)f(c) = f(a^4d^4c^2)$ và $f(a)f(b)f(c) = f(a)f(b^2c^2) = f(a^2b^4c^4)$.

Ta sẽ chọn c, d sao cho $a^4d^4c^2 = a^2b^4c^4 \Leftrightarrow a^2d^4 = b^4c^2 \Leftrightarrow ad^2 = b^2c$ (1). Với c, d thỏa mãn (1) thì

$$f(a^4d^4c^2) = f(a^2b^4c^4) \Leftrightarrow f(a)f(d)f(c) = f(a)f(b)f(c) \Leftrightarrow f(b) = f(d) \quad (2).$$

Tất nhiên ta cần chọn $d \neq b$ và c thỏa mãn (1) chẳng hạn $d = b^2, c = ab^2$.

Nên từ (2) ta được $f(b) = f(b^2), \forall b \in S$ (3).

Từ tính chất (3) ta có

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2), \forall a, b \in S, a \neq b \Leftrightarrow f(a)f(b) = f(ab), \forall a, b \in S, a \neq b \quad (4).$$

Sử dụng tính chất (3) và (4) ta được

$$f(16) = f(4^2) = f(4) = f(2^2) = f(2)$$

Mặt khác $f(16) = f(2.8) = f(2)f(8)$. Từ hai đẳng thức trên ta được

$$f(2)f(8) = f(2) \Leftrightarrow f(8) = 1 \text{ vô lí. Vậy không tồn tại hàm số } f \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

22.(Iran 2004) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(m) + f(n) \mid m + n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Phân tích lời giải

Trước hết ta tính một vài giá trị ban đầu như $f(1), f(2), f(3)$ để dự đoán công thức của hàm số f . Từ điều kiện ban đầu ta thay $m = n = 1$ thu được

$$f(1) + f(1) \mid 2 \Leftrightarrow 2f(1) \mid 2 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

Để tính $f(2)$, từ điều kiện ban đầu ta thay $m = 2, n = 1$ ta được

$$f(2) + f(1) \mid 3 \Leftrightarrow f(2) + 1 \mid 3 \Leftrightarrow f(2) + 1 = 3 \Leftrightarrow f(2) = 2$$

Như vậy ta có thể dự đoán hàm số cần tìm là $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Làm thế nào để chỉ ra được hàm như vậy.

Hướng thứ nhất. Đầu tiên ta nghĩ đến hướng sử dụng phương pháp quy nạp. Giả sử $f(k)=k, k=1,2,\dots,n$, ta sẽ chứng minh $f(n+1)=n+1$. Thật vậy, từ điều kiện ban đầu ta được

$$f(n)+f(n+1)|n+n+1 \Rightarrow n+f(n+1)|2n+1 \Rightarrow n+f(n+1)=2n+1$$

$$\Rightarrow f(n+1)=n+1.$$

Từ đó ta có $f(n)=n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm của bài toán là $f(n)=n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng thứ hai. Ta nhận thấy nếu chọn $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m+n$ là một số nguyên tố thì ta sẽ tính được $f(n)+f(m)$.

Chọn $m=p-1, n=1$, trong đó p là một số nguyên tố. Khi đó từ điều kiện ban đầu ta thu được

$$f(p-1)+f(1)|p-1+1 \Rightarrow f(p-1)+1|p \Rightarrow f(p-1)+1=p \Rightarrow f(p-1)=p-1$$

Để sử dụng kết quả trên ta thay $m=p-1$ vào điều kiện ban đầu và với mỗi số nguyên dương n ta được

$$f(p-1)+f(n)|p-1+n$$

$$\Leftrightarrow p-1+f(n)|p-1+n$$

$$\Leftrightarrow p-1+f(n)|p-1+f(n)+n-f(n)$$

$$\Leftrightarrow p-1+f(n)|n-f(n)$$

Nếu ta chọn p là số nguyên tố đủ lớn thì điều kiện trên xảy ra khi $f(n)=n$. Vậy nghiệm của bài toán là $f(n)=n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

23.(IMO Shortlisted 2004, India 2005) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(f(m)^2 + f(n))|(m^2 + n)^2, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Phân tích lời giải

Đầu tiên ta thử tính một số giá trị đặc biệt như $f(1), f(2), f(3), \dots$ để dự đoán công thức của hàm số f . Từ điều kiện ban đầu ta thay $m=n=1$ thu được $(f(1)^2 + f(1))|4$. Từ điều kiện này nếu $f(1) \geq 2$ thì $f(1)^2 + f(1) \geq 6$

vô lí suy ra $f(1)=1$. Thay $m=1, n=2$ và $m=2, n=1$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$\begin{cases} \left(f(1)^2 + f(2) \right) \mid 9 \\ \left(f(2)^2 + f(1) \right) \mid 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + f(2)) \mid 9 \\ \left(f(2)^2 + 1 \right) \mid 25 \end{cases} \Leftrightarrow f(2) = 2$$

Như vậy ta dự đoán $f(n)=n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Bài toán này có nội dung khá giống với bài toán trên nên ta thử giải theo một trong hai hướng của bài toán trước.

Hướng thứ nhất. Đầu tiên ta nghĩ đến hướng sử dụng phương pháp quy nạp. Giả sử $f(k)=k, k=1, 2, \dots, n$, ta sẽ chứng minh $f(n+1)=n+1$. Thật vậy, ta lần lượt thay $m=n, n$ bởi $n+1$ và $m=n+1, n=n$ vào điều kiện ban đầu ta được

$$\left(f(n)^2 + f(n+1) \right) \mid \left(n^2 + n + 1 \right)^2 \Rightarrow \left(n^2 + f(n+1) \right) \mid \left(n^2 + n + 1 \right)^2$$

$$\left(f(n+1)^2 + f(n) \right) \mid \left((n+1)^2 + n \right)^2 \Rightarrow \left(n + f(n+1)^2 \right) \mid \left(n^2 + 3n + 1 \right)^2$$

Ta nhận thấy từ hai điều kiện trên để đánh giá được $f(n+1)$ là rất khó khăn và hướng làm thứ nhất này gặp khó khăn!

Hướng thứ hai. Ta nhận thấy nếu chọn $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m^2 + n$ là một số nguyên tố thì ta sẽ tính được $f(m)^2 + f(n)$.

Chọn $m=p-1, n=1$, trong đó p là một số nguyên tố. Khi đó từ điều kiện ban đầu ta thu được

$$\begin{aligned} \left(f(1)^2 + f(p-1) \right) \mid (1 + p - 1)^2 &\Rightarrow f(p-1) + 1 \mid p^2 \Rightarrow f(p-1) + 1 \in \{p, p^2\} \\ &\Rightarrow f(p-1) \in \{p-1, p^2-1\} \end{aligned}$$

$$\text{TH1. } f(p-1) = p^2 - 1$$

Để sử dụng kết quả trên ta thay $m=p-1$ vào điều kiện ban đầu và với mỗi số nguyên dương n ta được

$$\left(f(p-1)^2 + f(1) \right) \mid \left((p-1)^2 + 1 \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left((p^2 - 1)^2 + 1 \right) \mid \left((p-1)^2 + 1 \right)^2$$

$$\Leftrightarrow (p^4 - 2p^2 + 2) \mid (p^4 - 2p^2 + 2 - 4p^3 + 10p^2 - 8p + 2)$$

$$\Leftrightarrow (p^4 - 2p^2 + 2) \mid (-4p^3 + 10p^2 - 8p + 2)$$

$$\Leftrightarrow (p^4 - 2p^2 + 2) \mid (4p^3 - 10p^2 + 8p - 2)$$

$$\Rightarrow p^4 - 2p^2 + 2 \leq 4p^3 - 10p^2 + 8p - 2$$

$$\Rightarrow (p^2 - 2)^2 + 4(p - 1)^2 \leq 0 \text{ vô lí.}$$

$$\text{TH2. } f(p - 1) = p - 1$$

Để sử dụng kết quả trên ta thay $m = p - 1$ vào điều kiện ban đầu và với mỗi số nguyên dương n ta được

$$(f(p - 1)^2 + f(n)) \mid ((p - 1)^2 + n)^2$$

$$\Leftrightarrow ((p - 1)^2 + f(n)) \mid ((p - 1)^2 + f(n) + n - f(n))^2$$

$$\Leftrightarrow ((p - 1)^2 + f(n)) \mid (n - f(n))^2.$$

Nếu ta chọn p là số nguyên tố đủ lớn thì điều kiện trên xảy ra khi $f(n) = n$. Từ đó ta có $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm của bài toán là $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

24.(Canada 2015) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(n - 1)^2 < f(n) f(f(n)) < n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Phân tích lời giải

Với dạng toán mà giả thiết về bất đẳng thức thì việc dự đoán được nghiệm đóng vai trò quan trọng trong việc định hướng lời giải. Việc dự đoán nghiệm thường ta thông qua việc tính các giá như $f(1), f(2), f(3), \dots$

Thay $n = 1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$0 < f(1) f(f(1)) < 2 \Rightarrow f(1) = 1.$$

Thay $n = 2$ vào phương trình ban đầu ta được

$$1 < f(2) f(f(2)) < 6. \text{ Từ bất đẳng thức này suy ra } f(2) > 1, \text{ nếu } f(2) \geq 3.$$

Từ điều kiện ban đầu ta thay n bởi $f(n)$ thu được

$$(f(n) - 1)^2 < f(f(n)) f(f(f(n))) < f(n)^2 + f(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1).$$

Từ (1), thay $n=2$ ta được

$$\begin{aligned} (f(2)-1)^2 &< f(f(2))f(f(f(2))) < f(2)^2 + f(2) \\ \Rightarrow 4 &\leq (f(2)-1)^2 < f(f(2))f(f(f(2))) \Rightarrow f(f(2)) \geq 2 \text{ điều này mâu thuẫn} \\ \text{với } 1 &< f(2)f(f(2)) < 6. \text{ Do đó } f(2) = 2. \end{aligned}$$

Do đó ta dự đoán $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Giả sử $f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(n-1) = n-1$. Ta chứng minh $f(n) = n$. Với mỗi số nguyên dương n , đặt $f(n) = m$. Ta xét các trường hợp sau:

Nếu $m \leq n-1 \Rightarrow f(n)f(f(n)) = mf(m) = m^2 \leq (n-1)^2$ vô lí.

Nếu $f(n) = m \geq n+1 \Rightarrow (n+1)f(f(n)) \leq f(n)f(f(n)) < n^2 + n \Rightarrow f(f(n)) < n$
 $f(f(f(n))) = f(f(n)) \Rightarrow f(f(n)) \cdot f(f(f(n))) = (f(f(n)))^2 < n^2$, kết hợp với
 $f(f(f(n)))f(f(n)) > (f(n)-1)^2$ ta được

$$n^2 > (f(n)-1)^2 \Rightarrow f(n) < n+1 \text{ vô lí.}$$

Do đó $f(n) = n$. Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

25.(Balkan MO 2002) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$2n + 2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2002, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Phân tích lời giải

Nếu ta thay n bởi $f(n)$ ta được

$$2f(n) + 2001 \leq f(f(f(n))) + f(f(n)) \leq 2f(n) + 2002, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1).$$

Bất đẳng thức này gợi cho chúng ta đến hướng làm bằng cách sử dụng dãy lặp. Cụ thể với mỗi số nguyên dương m , xét dãy số (a_n) thỏa mãn:

$$a_0 = m, a_1 = f(a_0), a_{n+1} = f(a_n), n \geq 0.$$

Kết hợp với (1) ta được đánh giá sau

$$\begin{aligned} 2a_n + 2001 &\leq a_{n+2} + a_{n+1} \leq 2a_n + 2002, \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq a_{n+2} - a_{n+1} - 667 + 2(a_{n+1} - a_n - 667) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2). \end{aligned}$$

Để đơn giản ta đặt $b_n = a_n - a_{n-1} - 667, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó (2) có dạng:

$$0 \leq b_{n+1} + 2b_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3).$$

Ta có $b_1 = a_1 - a_0 - 667 = f(m) - m - 667$ nên việc tìm hàm số f tương đương với việc tìm b_1 . Ta dự đoán $b_1 = 0$, muốn vậy ta chỉ ra trường hợp $b_1 > 0$ và $b_1 < 0$ không xảy ra. Thật vậy

TH1. $b_1 > 0 \Rightarrow b_1 \geq 1$, kết hợp với (3) ta được:

$$0 \leq b_2 + 2b_1 \leq 1 \Rightarrow b_2 \leq 1 - 2b_1 \leq -1$$

Tiếp tục sử dụng (3) thu được

$$0 \leq b_3 + 2b_2 \leq 1 \Rightarrow b_3 \geq -2b_2 \geq 2$$

$$0 \leq b_4 + 2b_3 \leq 1 \Rightarrow b_4 \leq 1 - 2b_3 \leq 1 - 2^2$$

$$0 \leq b_5 + 2b_4 \leq 1 \Rightarrow b_5 \geq -2b_4 \geq -2(1 - 2^2) = 2^3 - 2$$

Bằng phương pháp quy ta chứng minh được

$$b_{2k} \leq 1 - 2^k, b_{2k+1} \geq 2^{k+1} - 2, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (4).$$

Theo cách đặt ở trên ta được

$$b_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} - 667$$

$$b_{2k+1} = a_{2k+1} - a_{2k} - 667$$

Cộng từng vế hai đẳng thức này ta được

$$b_{2k+2} + b_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k} - 1334$$

$$\Rightarrow a_{2k+2} - a_{2k} = b_{2k+2} + b_{2k+1} + 1334, k \in \mathbb{N}^* \quad (5).$$

Từ (3), (4) và (5) ta được đánh giá sau

$$a_{2k+2} - a_{2k} \leq 1 - b_{2k+1} + 1334 \leq 1 - (2^{k+1} - 2) + 1334 = 1337 - 2^{k+1} \quad (6).$$

Từ (6) nếu lấy $k \geq 13$ ta được

$$a_{2k+2} < a_{2k}, \forall k \geq 13$$

Điều này không xảy ra vì dãy (a_n) là dãy số nguyên dương. Suy ra trường hợp $b_1 > 0$ không thỏa mãn.

TH2. $b_1 < 0 \Rightarrow b_1 \leq -1$, kết hợp với (3) ta được:

$$0 \leq b_2 + 2b_1 \leq 1 \Rightarrow b_2 \geq -2b_1 \geq 2$$

Tiếp tục sử dụng (3) thu được

$$0 \leq b_3 + 2b_2 \leq 1 \Rightarrow b_3 \leq 1 - 2b_2 \leq 1 - 2^2$$

$$0 \leq b_4 + 2b_3 \leq 1 \Rightarrow b_4 \geq -2b_3 \geq 2^3 - 2$$

$$0 \leq b_5 + 2b_4 \leq 1 \Rightarrow b_5 \leq 1 - 2b_4 \leq 1 - 2(2^3 - 2) = 5 - 2^4 \leq 1 - 2^3$$

Bằng phương pháp quy ta chứng minh được

$$b_{2k+1} \leq 1 - 2^{k+1}, b_{2k} \geq 2^{k+1} - 2, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (7).$$

Theo cách đặt ở trên ta được

$$b_{2k+3} = a_{2k+3} - a_{2k+2} - 667$$

$$b_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} - 667$$

Cộng từng vế hai đẳng thức này ta được

$$b_{2k+3} + b_{2k+2} = a_{2k+3} - a_{2k+1} - 1334$$

$$\Rightarrow a_{2k+3} - a_{2k+1} = b_{2k+3} + b_{2k+2} + 1334, k \in \mathbb{N}^* \quad (8).$$

Từ (3), (7) và (8) ta được đánh giá sau

$$a_{2k+3} - a_{2k+1} \leq 1 - b_{2k+2} + 1334 \leq 1 - (2^{k+2} - 2) + 1334 = 1337 - 2^{k+2} \quad (9).$$

Từ (9) nếu lấy $k \geq 13$ ta được

$$a_{2k+3} < a_{2k+1}, \forall k \geq 13$$

Điều này không xảy ra vì dãy (a_n) là dãy số nguyên dương. Suy ra trường hợp $b_1 < 0$ không thỏa mãn.

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b_1 = 0$ hay ta được

$$a_1 - a_0 - 667 = 0 \Leftrightarrow f(m) = m + 667. \text{ Thử lại hàm số } f(n) = n + 667, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

thỏa mãn yêu cầu bài toán.

26.(India 2012, Japan 2007) Tìm tất cả hàm số $f:(0;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

$$f(x) + f(y) \leq \frac{f(x+y)}{2} \text{ và } \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y} \text{ với mọi } x, y \in (0;+\infty)$$

Phân tích lời giải

Thay $x = y$ vào các bất đẳng thức ban đầu ta được

$$4f(x) \leq f(2x) \text{ và } 2\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(2x)}{2x} \Leftrightarrow f(2x) \leq 4f(x)$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $4f(x) = f(2x), \forall x > 0$ (1)

Từ (1) bằng quy nạp ta được

$$f(2^n x) = 4^n f(x), \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Tiếp theo nhìn vào hai bất đẳng thức đã cho ta có thể đánh giá $f(x+y)$ theo hai chiều như sau

$$\text{Ta có } f(x) + f(y) \leq \frac{f(x+y)}{2} \Rightarrow f(x+y) \geq 2f(x) + 2f(y)$$

$$\text{và } \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y} \Rightarrow (x+y) \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \right) \geq f(x+y)$$

Từ hai đánh giá trên ta thu được

$$(x+y) \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \right) \geq 2f(x) + 2f(y)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(y) + \frac{yf(x)}{x} + \frac{xf(y)}{y} \geq 2f(x) + 2f(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{yf(x)}{x} + \frac{xf(y)}{y} \geq f(x) + f(y), \forall x, y > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \left(\frac{y}{x} - 1 \right) \geq f(y) \left(1 - \frac{x}{y} \right), \forall x, y > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \left(\frac{y-x}{x} \right) \geq f(y) \left(\frac{y-x}{y} \right), \forall x, y > 0$$

Nếu ta xét $x < y$ thì từ bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y}, \forall y > x > 0 \quad (3)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$, kết hợp với (1) ta được

$$g(x) \geq g(y), \forall y > x > 0 \quad (4)$$

Từ cách xác định của hàm g và bất đẳng thức ban đầu ta được

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y), \forall x, y > 0 \quad (5)$$

Từ (5) ta được $g(nx) \leq ng(x), \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^*$ (6).

Sử dụng (2) thu được $g(2^n x) = \frac{f(2^n x)}{2^n x} = \frac{4^n f(x)}{2^n x} = 2^n g(x), \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow g(2^n x) = 2^n g(x), \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^* \quad (7).$$

Từ (6) và (7) ta dự đoán $g(nx) = ng(x), \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với mỗi số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại số nguyên dương m sao cho $2^{m-1} \leq n < 2^m$. Sử dụng (5), (6) và (7) ta được

$$\begin{aligned} g(2^m x) &= 2^m g(x) = g(2^m x + nx - nx) \\ &\leq g(2^m x - nx) + g(nx) = g((2^m - n)x) + g(nx) \\ &\leq (2^m - n)g(x) + ng(x) = 2^m g(x), \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Do đó từ đánh giá trên thì các bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Do đó

$$g(nx) = ng(x), \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^* \quad (8)$$

27.(Romania TST 2004, Macedonia NMO 2008) Tìm tất cả các hàm số đơn ánh $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Phân tích lời giải

Nếu ta thay n bởi $f(n)$ ta được

$$f(f(f(n))) \leq \frac{f(n) + f(f(n))}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Bất đẳng thức này gợi cho chúng ta đến hướng làm bằng cách sử dụng dãy lặp. Cụ thể với mỗi số nguyên dương m , xét dãy số (a_n) thỏa mãn:

$$a_0 = m, a_1 = f(a_0), a_{n+1} = f(a_n), n \geq 0.$$

Kết hợp với (1) ta được đánh giá sau

$$a_{n+2} \leq \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Từ bất đẳng thức (2) ta có $a_n \leq \max\{a_0, a_1\}, \forall n \geq 2 \quad (3).$

Từ (3) suy ra dãy số (a_n) chỉ có hữu hạn các giá trị khác nhau. Gọi y là số hạng lớn nhất trong các số hạng của dãy (a_n) . Giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho $a_k = y$, theo (2) ta được

$$a_k \leq \frac{a_{k-1} + a_{k-2}}{2}, \forall k \geq 2 \Rightarrow 2y \leq a_{k-1} + a_{k-2} \quad (4)$$

kết hợp với

$$2y \geq a_{k-1} + a_{k-2} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta được

$$a_k = a_{k-1} = a_{k-2} = y$$

Lí luận tương tự như vậy ta được

$$a_k = a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = a_2 = a_1 = y$$

Kết hợp với f là đơn ánh nên $a_2 = a_1 \Leftrightarrow f(f(n)) = f(n) \Leftrightarrow f(n) = n$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy nghiệm của bài toán là $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

28.(Iran MO 2009) Có tồn tại hay không hai hàm số $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| > 1, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$$

Phân tích lời giải

Ta dự đoán không tồn tại hàm số f, g thỏa mãn yêu cầu bài toán. Giả sử tồn tại hai hàm số f, g thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ chứng minh tồn tại hai số thực x, y sao cho $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}, |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}$. Khi đó mâu thuẫn với điều kiện bài toán.

Ta có $\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right]$ và tập $F_z = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right] \right\}$ suy ra $\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} F_z$.

Do tập $\mathbb{R}$ là một tập không đếm được và $\mathbb{Z}$ là một tập đếm được nên tồn tại $z_1 \in \mathbb{Z}$ sao cho F_{z_1} là tập không đếm được.

Với mỗi $x \in F_{z_1} \Rightarrow g(x) \in \mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right]$. Xét các tập

$$G_z = \left\{ x \in F_{z_1} \mid g(x) \in \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right] \right\} \Rightarrow F_{z_1} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} G_z$$

Do tập F_{z_1} là tập không đếm được và $\mathbb{Z}$ là một tập đếm được nên tồn tại $z_2 \in \mathbb{Z}$ sao cho G_{z_2} là tập không đếm được.

Lấy $x, y \in G_{z_2} \Rightarrow x, y \in F_{z_1}$. Từ cách xác định của F_{z_1} và G_{z_2} ta được

$$f(x), f(y) \in \left[\frac{z_1}{2}; \frac{z_1+1}{2} \right]; g(x), g(y) \in \left[\frac{z_2}{2}; \frac{z_2+1}{2} \right]$$

Suy ra

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Mâu thuẫn với giả thiết bài toán. Vậy không tồn tại hai hàm số f, g thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. PHƯƠNG TRÌNH HÀM SỬ DỤNG GIỚI HẠN

29.(Bulgaria 2006) Cho hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) - f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)}, \forall x > y > 0$$

- a) Chứng minh rằng $f(2x) = 4f(x), \forall x > 0$;
b) Tìm tất cả hàm số f thỏa mãn điều kiện đã cho.

Phân tích lời giải

Để chứng minh đẳng thức $f(2x) = 4f(x), \forall x > 0$ ta đi theo hướng sau: Ta sẽ tính các $f(nx), n \geq 3$ theo $f(x), f(2x)$ sau đó tìm một số nguyên dương n mà có hai cách biểu diễn được theo $f(x), f(2x)$. Từ đó ta sẽ được đẳng thức liên quan giữa $f(x)$ và $f(2x)$. Để thực hiện được điều này ta sẽ lần lượt tính $f(3x), f(4x), f(5x), \dots$

Đặt $a = f(x), b = f(2x)$. Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta có

$$f(2x+x) - f(2x-x) = 4\sqrt{f(2x)f(x)} \Rightarrow f(3x) = a + 4\sqrt{ab} \quad (1)$$

$$f(3x+x) - f(3x-x) = 4\sqrt{f(3x)f(x)} \Rightarrow f(4x) = b + 4\sqrt{a(a+4\sqrt{ab})} \quad (2)$$

Chú ý ta có thể viết $5x = 4x + x$ hoặc $5x = 3x + 2x$ nên ta có thể tính $f(5x)$ theo hai cách khác nhau

$$f(4x+x) - f(4x-x) = 4\sqrt{f(4x)f(x)} \Rightarrow f(5x) = f(4x) + 4\sqrt{f(4x)f(x)}$$

$$\Rightarrow f(5x) = a + 4\sqrt{ab} + 4\sqrt{a\left(b + 4\sqrt{a(a+4\sqrt{ab})}\right)} \quad (3)$$

$$f(3x+2x) - f(3x-2x) = 4\sqrt{f(3x)f(2x)} \Rightarrow f(5x) = f(3x) + 4\sqrt{f(3x)f(2x)}$$

$$\Rightarrow f(5x) = a + 4\sqrt{b(a+4\sqrt{ab})} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) thu được

$$a + 4\sqrt{ab} + 4\sqrt{a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)} = a + 4\sqrt{b(a + 4\sqrt{ab})}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)} = \sqrt{b(a + 4\sqrt{ab})}$$

$$\Leftrightarrow ab + a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right) + 2\sqrt{ab.a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)} = b(a + 4\sqrt{ab})$$

$$\Leftrightarrow a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right) + 2\sqrt{ab.a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)} = 4b\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right) + 2\sqrt{ab.a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)}\right)^2 = 16ab^3$$

$$\Leftrightarrow a\left(\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right) + 2\sqrt{ab.a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)}\right)^2 = 16b^3 \quad (5)$$

+) Nếu $a < \frac{1}{4}b$ thì

$$a\left(\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right) + 2\sqrt{ab.a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)}\right)^2$$

$$< \frac{1}{4}b\left(\left(b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b\left(\frac{1}{4}b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b.b}\right)}\right) + 2\sqrt{\frac{1}{4}b.b.\frac{1}{4}b\left(b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b\left(\frac{1}{4}b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b.b}\right)}\right)}\right)^2 = 16b^3$$

vô lí với (5).

+) Nếu $a > \frac{1}{4}b$ thì

$$a\left(\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right) + 2\sqrt{ab.a\left(b + 4\sqrt{a(a + 4\sqrt{ab})}\right)}\right)^2$$

$$> \frac{1}{4}b\left(\left(b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b\left(\frac{1}{4}b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b.b}\right)}\right) + 2\sqrt{\frac{1}{4}b.b.\frac{1}{4}b\left(b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b\left(\frac{1}{4}b + 4\sqrt{\frac{1}{4}b.b}\right)}\right)}\right)^2 = 16b^3$$

vô lí với (5).

Do đó $a = \frac{1}{4}b \Leftrightarrow f(2x) = 4f(x), \forall x > 0.$

b) Từ phương trình ban đầu ta được

$$f((n+1)x) - f((n-1)x) = 4\sqrt{f(nx)f(x)}, \forall x > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1 \quad (6)$$

Kết hợp với $f(2x) = 4f(x), \forall x > 0$ và sử dụng phương pháp quy nạp ta được $f(nx) = n^2 f(x), \forall n \geq 1, \forall x > 0 \quad (7)$.

Từ (7) ta xác định được $f(x)$ với $x \in \mathbb{Q} \cap (0; +\infty)$. Thật vậy, trong (7) thay $x = \frac{1}{n}$ ta được

$$f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n^2}$$

Với $m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = m^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = m^2 \cdot \frac{f(1)}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1) \quad (7)$$

Từ (7) suy ra $f(r) = r^2 f(1), \forall r \in \mathbb{Q} \cap (0; +\infty) \quad (8)$.

Theo kết quả cơ bản đã biết nếu có đẳng thức (8) và hàm số f đơn điệu thì ta được $f(x) = x^2 f(1), \forall x \in (0; +\infty)$. Thật vậy, đầu tiên ta chỉ ra hàm số f đơn điệu tăng. Từ giả thiết ta có

$$f(x+y) - f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)} > 0, \forall x > y > 0$$

$$\Rightarrow f(x+y) > f(x-y), \forall x, y \in (0; +\infty), x > y$$

Với $u > v > 0$, tồn tại các số dương $x > y > 0$ sao cho $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$

Suy ra $f(x+y) > f(x-y), \forall x, y \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f(u) > f(v), \forall u, v \in (0; +\infty), u > v \text{ hay hàm số } f \text{ đồng biến.}$$

Dựa theo tính trù mật của tập $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ ta có, với mỗi số $x > 0$, tồn tại hai dãy $(u_n), (v_n)$ hữu tỉ sao cho (u_n) là dãy số tăng có giới hạn là x và (v_n) là dãy số giảm có giới hạn là x .

Ta có bất đẳng thức sau

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow f(1)u_n^2 \leq f(x) \leq f(1)v_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (9)$$

Từ (9) chuyển qua giới hạn ta được

$$\Rightarrow f(1)x^2 \leq f(x) \leq f(1)x^2, \forall x \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow f(x) = f(1)x^2, \forall x \in (0; +\infty)$. Thử lại ta thấy hàm $f(x) = ax^2, \forall x \in (0; +\infty)$, trong đó a là hằng số, thỏa mãn điều kiện.

30.(Iran MO 2014) Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y)) + f(f(y)) = f(x)f(y) + 2, \forall x, y \in [0; +\infty)$$

Phân tích lời giải

Thay một vài giá trị đặc biệt của x, y chẳng hạn

$$\text{Với } x=0 \text{ ta được } f(0) + f(f(y)) = f(0)f(y) + 2, \forall y \in [0; +\infty) \quad (1)$$

$$\text{Với } x=1 \text{ ta được } 2f(f(y)) = f(1)f(y) + 2, \forall y \in [0; +\infty) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) để tìm liên hệ giữa $f(f(y))$ và $f(y)$ ta cần phải tính được $f(0), f(1)$.

Để đơn giản ta đặt $f(1) = a, f(0) = b$.

Trong (1) ta thay $y=0$ thu được

$$f(0) + f(f(0)) = f(0)f(0) + 2 \Leftrightarrow f(f(0)) = b^2 - b + 2 \quad (3)$$

Trong (1) ta thay $y=1$ thu được

$$f(0) + f(f(1)) = f(0)f(1) + 2 \Leftrightarrow f(f(1)) = ab - b + 2 \quad (4)$$

Trong (2) ta thay $y=1$ thu được

$$2f(f(1)) = f(1)^2 + 2 \Leftrightarrow 2f(f(1)) = a^2 + 2 \quad (5)$$

Thay (5) vào (4) ta được

$$a^2 + 2 = 2ab - 2b + 4 \Leftrightarrow a^2 = 2ab - 2b + 2 \quad (6)$$

Trong (2) ta thay $y=0$ thu được

$$2f(f(0)) = f(1)f(0) + 2 \Leftrightarrow 2f(f(0)) = ab + 2 \quad (7)$$

Thay (7) vào (3) ta được

$$ab + 2 = 2b^2 - 2b + 4 \Leftrightarrow ab = 2b^2 - 2b + 2 \quad (8)$$

Từ (8) suy ra $a = \frac{2b^2 - 2b + 2}{b}$ thay vào (6) ta được phương trình sau

$$\left(\frac{2b^2 - 2b + 2}{b} \right)^2 = 4b^2 - 4b + 4 - 2b + 2$$

$$\Leftrightarrow (2b^2 - 2b + 2)^2 = b^2(4b^2 - 6b + 6)$$

$$\Leftrightarrow 4b^4 + 4b^2 + 4 - 8b^3 - 8b + 8b^2 = 4b^4 - 6b^3 + 6b^2$$

$$\Leftrightarrow b^3 - 3b^2 + 4b - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b^2 - 2b + 2) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2. \text{ Do đó } f(0) = 1, f(1) = 2.$$

Thay vào (1) ta được

$$f(f(y)) = f(y) + 1, \forall y \in [0; +\infty) \quad (9).$$

Từ (9) bằng phương pháp quy nạp ta được

$$f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (10)$$

Tiếp theo ta sẽ tìm $f(y)$ với y là số hữu tỷ dương. Nếu tìm được như vậy thì dựa vào tính liên tục của hàm số ta được $f(y), y \in [0; +\infty)$.

Từ phương trình ban đầu ta thay $y = n \in \mathbb{N}^*$ ta được

$$f(xf(n)) + f(f(n)) = f(x)f(n) + 2, \forall x \in [0; +\infty)$$

Kết hợp với (10) thu được

$$f(x(n+1)) + f(n+1) = f(x)(n+1) + 2, \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(x(n+1)) + n + 2 = f(x)(n+1) + 2, \forall x \in [0; +\infty) \quad (11)$$

Trong (11) thay $x = \frac{1}{n+1}$ vào (11) thu được

$$f(1) + n + 2 = f\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1) + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 + n + 2 = f\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1) + 2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + 1$$

Kết hợp với $f(1) = 2$ ta được

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (12)$$

Trong (11) thay $x = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^*$ thu được

$$f\left(\frac{n+1}{m}\right) = \frac{n+1}{m} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Kết hợp với (12) ta được

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (13)$$

Với mỗi số thực $x \in [0; +\infty)$, tồn tại dãy hữu tỉ (u_n) sao cho $\lim u_n = x$. Mặt khác, $f(u_n) = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đẳng thức trên chuyển qua giới hạn và dựa vào tính liên tục ta được

$$\lim f(u_n) = \lim(u_n + 1)$$

$$\Rightarrow f(\lim u_n) = (\lim u_n + 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 1$$

Thử lại với hàm $f(x) = x + 1, x \in [0; +\infty)$ thỏa mãn. Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = x + 1, x \in [0; +\infty)$.

5. ĐƠN ÁNH, TOÀN ÁNH VÀ SONG ÁNH TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Một trong những lĩnh vực rất quan trọng trong toán học đó là lĩnh vực liên quan đến hàm số, có thể nói hàm số xuất hiện và đóng vai trò quan trọng trong các lĩnh vực của toán học như: giải tích, hình học, xác suất, phương pháp tính, toán ứng dụng... Trong các lĩnh vực liên quan đến hàm số thì các khái niệm về đơn ánh, toàn ánh và song ánh đóng một vai trò rất quan trọng. Chính vì vậy mà các bài toán về hàm số liên quan đến song ánh thường xuất hiện trong hầu hết các đề thi olimpiad của các nước, khu vực và quốc tế. Các bài tập loại này thường rất đa dạng về phương pháp giải, về mức độ khó, tính mới mẻ. Vì vậy để phân chia thành các dạng toán cụ thể là rất khó khăn. Tuy nhiên trong bài viết này tôi cố gắng đưa ra một số bài tập với một số phương pháp giải tương ứng.

5.1. Ánh xạ

5.1.1. Định nghĩa. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một (và chỉ một) phần tử của Y . Phần tử này được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và được kí hiệu là $f(x)$.

(i) Tập X được gọi là tập xác định của f . Tập hợp Y được gọi là tập giá trị của f .

(ii) Ánh xạ f từ X đến Y được kí hiệu là

$$f : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

(iii) Khi X và Y là các tập số thực, ánh xạ f được gọi là một hàm số xác định trên X

(iv) Cho $a \in X, y \in Y$. Nếu $f(a) = y$ thì ta nói y là ảnh của a và a là nghịch ảnh của y qua ánh xạ f .

(v) Tập hợp $Y = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$ gọi là tập ảnh của f . Nói cách khác, tập ảnh $f(X)$ là tập hợp tất cả các phần tử của Y mà có nghịch ảnh.

5.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

5.2.1. Định nghĩa. Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là đơn ánh nếu với $a \in X, b \in X$ mà $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$, tức là hai phần tử phân biệt sẽ có hai ảnh phân biệt.

Từ định nghĩa ta suy ra ánh xạ f là đơn ánh khi và chỉ khi với $a \in X, b \in X$ mà $f(a) = f(b)$, ta phải có $a = b$.

5.2.2. Định nghĩa. Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là toàn ánh nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy f là toàn ánh nếu và chỉ nếu $Y = f(X)$.

5.2.3. Định nghĩa. Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Như vậy ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là song ánh nếu và chỉ nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại và duy nhất một phần tử $x \in X$ để $y = f(x)$.

5.3. Ánh xạ ngược của một song ánh

5.3.1. Định nghĩa. Ánh xạ ngược của f , được kí hiệu bởi f^{-1} , là ánh xạ từ Y đến X gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

5.3.2. Chú ý. Nếu f không phải là song ánh thì ta không thể định nghĩa được ánh xạ ngược của f . Do đó chỉ nói đến ánh xạ ngược khi f là song ánh.

5.4. Ánh xạ hợp

5.4.1. Định nghĩa. Nếu $g: A \rightarrow B$ và $f: B \rightarrow C$ và $g(A) \subset B$ thì ánh xạ hợp $f \circ g: A \rightarrow C$ được xác định bởi

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Kí hiệu $p^n = \underbrace{p \circ p \circ \dots \circ p}_n$.

31.(IMO 1988). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(f(m) + f(n)) = m + n,$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Thay $m=n$ vào đẳng thức trên ta được $f(2f(n))=2n$ (1), và từ đẳng thức này ta có:

nếu $f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow f(f(n_1))=f(f(n_2)) \Rightarrow 2n_1=2n_2 \Rightarrow n_1=n_2$ hay suy ra f là đơn ánh.

Ta có $2n=n-1+n+1=n+n \Rightarrow f(f(n-1)+f(n+1))=f(f(n)+f(n))$, và do f là đơn ánh nên $f(n-1)+f(n+1)=2f(n)$, $\forall n \geq 2$ (2).

Từ đẳng thức (2) ta có:

$$f(n)-f(n-1)=f(n-1)-f(n-2)=\dots=f(2)-f(1)=a,$$

suy ra

$$f(n)=f(1)+(n-1)a=an+b; \text{ trong đó } b=f(1)-a.$$

Thay $f(n)=an+b$ vào phương trình ban đầu ta được $a=1, b=0$.

Vậy $f(n)=n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự bài trên ta giải được các bài tập sau:

32.(Canada 2008). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(2f(x)+f(y))=2x+y,$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

33.(Balkan MO 2009). Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập hợp các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(f^2(m)+2f^2(n))=m^2+2n^2,$$

Với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Nếu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(m_1)=f(m_2) \Rightarrow$$

$$f(f^2(m_1)+2f^2(n))=f(f^2(m_2)+2f^2(n)) \Rightarrow m_1^2+2n^2=m_2^2+2n^2, \text{ suy ra } m_1=m_2$$

hay f là đơn ánh.

Để thấy với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ ta có:

$$(n+2)^2+2(n-1)^2=(n-2)^2+2(n+1)^2.$$

Từ đẳng thức kết hợp với phương trình đã cho ta được:

$$f(f^2(n+2)+2f^2(n-1)) = f(f^2(n-2)+2f^2(n+1)),$$

do f là đơn ánh nên ta có:

$$f^2(n+2)+2f^2(n-1) = f^2(n-2)+2f^2(n+1) \quad (1)$$

Từ đẳng thức (1) ta có:

$$f^2(n+2)-2f^2(n+1)+f^2(n) = f^2(n+1)-2f^2(n)+f^2(n-1) = \dots = f^2(3)-2f^2(2)+f^2(1) = a.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^2(n)-f^2(n-1) &= f^2(n-1)-f^2(n-2)+a \\ f^2(n-1)-f^2(n-2) &= f^2(n-2)-f^2(n-3)+a \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^2(n)-f^2(n-1) &= f^2(2)-f^2(1)+a(n-2) \\ f^2(n-1)-f^2(n-2) &= f^2(2)-f^2(1)+a(n-3) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f^2(2)-f^2(1) = f^2(2)-f^2(1)$$

Cộng từng vế của các đẳng thức trên ta được:

$$f^2(n)-f^2(1) = (n-1)(f^2(2)-f^2(1)) + \frac{a(n-1)(n-2)}{2} \quad (2)$$

Từ đẳng thức (2) ta suy ra $f^2(n)$ có dạng:

$$f^2(n) = bn^2 + cn + d. \quad (3)$$

Mặt khác phương trình ban đầu cho $m=n$ ta được:

$$f(3f^2(n)) = 3n^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta thu được $b=1, c=d=0$. Vậy $f(n)=n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

34.(Indonesia TST 2010). Xác định tất cả các số thực a sao cho có một hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$x + f(y) = af(y + f(x)),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Để thấy nếu $a=0$ không thỏa mãn. Do đó $a \neq 0$, thay $y=0$ vào đẳng thức trên ta được:

$$f(f(x)) = \frac{x+f(0)}{a} \quad (1)$$

Từ đẳng thức (1) suy ra f là một toàn ánh nên tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x)=0$. Khi đó từ phương trình ban đầu ta có:

$$x+f(y)=af(y) \Leftrightarrow x=(a-1)f(y), \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Từ đẳng thức (2) thì sẽ xảy ra $a=1$ hoặc $f(y) \equiv \text{const}$.

+) Nếu $f(y) \equiv \text{const}$ thì không thỏa mãn phương trình ban đầu.

+) Nếu $a=1$ thì lấy $f(x)=x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán. Vậy $a=1$.

35.(MEMO 2009). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(xf(y)) + f(f(x)+f(y)) = yf(x) + f(x+f(y)),$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải

+) Nếu $f(x)=0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, thử vào phương trình đã cho ta thấy thỏa mãn.

+) Nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) \neq 0$. Khi đó với $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_1) = f(y_2)$, từ phương trình trên thay x bởi a và y lần lượt bởi y_1, y_2 ta được:

$$f(af(y_1)) + f(f(a)+f(y_1)) = y_1 f(a) + f(a+f(y_1)) \quad (1)$$

và

$$f(af(y_2)) + f(f(a)+f(y_2)) = y_2 f(a) + f(a+f(y_2)) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $y_1 f(a) = y_2 f(a) \Rightarrow y_1 = y_2$. Vậy f là một đơn ánh.

Thay $x=0, y=1$ vào phương trình ta được:
 $f(0) + f(f(0)+f(1)) = f(0) + f(f(1))$, sử dụng f là đơn ánh ta được $f(0)=0$.

Mặt khác thay $y=0$ vào phương trình và sử dụng $f(0)=0$ ta được:

$$f(xf(0)) + f(f(x) + f(0)) = 0, f(x) + f(x + f(0)) \\ \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

36.(IMO Shortlisted 2002). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

+) Ta chứng minh f là toàn ánh. Thật vậy, thay $y = -f(x)$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x) \Leftrightarrow f(f(-f(x)) - x) = f(0) - 2x,$$

suy ra f là toàn ánh.

+) Do f là toàn ánh nên tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = 0$.

+) Thay $x = a$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$f(y) = 2a + f(f(y) - a) \Leftrightarrow f(f(y) - a) + a = f(y) - a \quad (1)$$

+) Do f là toàn ánh nên với mọi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x + a = f(y)$.

Do đó từ đẳng thức (1) ta thu được: $x = f(x) + a \Leftrightarrow f(x) = x - a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn điều kiện. Vậy $f(x) = x - a$.

37.(France 1995). Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là một song ánh. Chứng minh rằng tồn tại ba số nguyên dương a, b, c sao cho $a < b < c$ và $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát hơn bài toán trên.

38.(Mở rộng France 1995) Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là một song ánh. Chứng minh rằng tồn tại bốn số nguyên dương a, b, c, d sao cho $a < b < c < d$ và $f(a) + f(d) = f(b) + f(c)$.

Lời giải.

Do f là một song ánh từ $\mathbb{N}^*$ đến $\mathbb{N}^*$ nên tồn tại n sao cho $f(1) < f(n)$.

$M = \{n \in \mathbb{N}^* : f(1) < f(n)\}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{N}^*$ nên tồn tại phần tử nhỏ nhất của M , kí hiệu là b , $b > 1$ và $f(b) > f(1)$. Gọi c là phần tử nhỏ nhất của tập $M \setminus \{b\}$, kí hiệu là c , $1 < b < c$ và $f(c) > f(1)$. Từ f là song ánh nên tồn tại $d \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(d) = f(b) + f(c) - f(1)$.

Từ đẳng thức trên suy ra $f(d) \neq f(b), f(d) \neq f(c) \Rightarrow d > c > b > 1$. Do đó tồn tại $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a = 1 < b < c < d$ và $f(a) + f(d) = f(b) + f(c)$.

6. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

39.(ELMO Shortlisted 2013) Tìm tất cả các hàm số đơn ánh $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) &= g(x) + h(y) \\ g(x + g(y)) &= h(x) + f(y) \\ h(x + h(y)) &= f(x) + g(y), \forall x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Phân tích lời giải

Ta có các đẳng thức sau

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) &= g(x) + h(y) \quad (1) \\ g(x + g(y)) &= h(x) + f(y) \quad (2) \\ h(x + h(y)) &= f(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3) \end{aligned}$$

Ta chú ý đến điều kiện f, g, h là đơn ánh và để sử dụng tính chất này ta cần tìm một đẳng thức dạng $f(a) = f(b)$ để từ đó suy ra $a = b$. Để xây dựng đẳng thức dạng $f(a) = f(b)$ ta cần kết hợp ba đẳng thức (1), (2) và (3), chẳng hạn như:

Trong (1) ta thay x bởi $x + g(y)$ và y bởi z khi đó thu được

$$f(x + g(y) + f(z)) = g(x + g(y)) + h(z).$$

Từ đẳng thức này sử dụng (2) ta được:

$$f(x + g(y) + f(z)) = h(x) + f(y) + h(z).$$

Từ đẳng thức này để sử dụng (3) ta thay x bởi $t + h(x)$ thu được

$$f(t + h(x) + g(y) + f(z)) = h(t + h(x)) + f(y) + h(z)$$

$$\Leftrightarrow f(t + h(x) + g(y) + f(z)) = f(t) + g(x) + f(y) + h(z) \quad (4).$$

Ta nhận thấy trong (4) đổi vai trò của y cho t ta thấy vế phải của (4) không thay đổi nhưng vế trái sẽ là $f(y + h(x) + g(t) + f(z))$. Từ đó ta được đẳng thức

$f(t+h(x)+g(y)+f(z))=f(y+h(x)+g(t)+f(z))$, kết hợp với f là đơn ánh ta được

$$t+h(x)+g(y)+f(z)=y+h(x)+g(t)+f(z)$$

$$\Leftrightarrow t+g(y)=y+g(t), \forall y, t \in \mathbb{R} \quad (5).$$

Trong (5) ta thay $t=0$ ta được $g(y)=y+g(0), \forall y \in \mathbb{R}$. Hoàn toàn tương tự ta có $f(y)=y+f(0), \forall y \in \mathbb{R}$, $h(y)=y+h(0), \forall y \in \mathbb{R}$. Thử vào các phương trình (1), (2) và (3) ta được

$$\begin{cases} x+y+2f(0)=x+g(0)+y+h(0) \\ x+y+2g(0)=x+h(0)+y+f(0) \\ x+y+2h(0)=x+f(0)+y+g(0), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(0)=g(0)+h(0) \\ 2g(0)=h(0)+f(0) \\ 2h(0)=f(0)+g(0) \end{cases} \Leftrightarrow f(0)=g(0)=h(0).$$

Vậy các hàm số phải tìm là $f(x)=x+a, g(x)=x+a, h(x)=x+a, \forall x \in \mathbb{R}$.

40.(Middle European Mathematical Olimpiad 2012, KoMal – A328) Tìm tất cả các hàm số đơn ánh $f:(0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+f(y))=yf(xy+1), \forall x, y \in (0;+\infty)$$

Phân tích lời giải

Thay $y=1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(x+f(1))=f(x+1), \forall x \in (0;+\infty)$$

Từ đẳng thức này ta hướng đến việc chỉ ra hàm số f là đơn ánh hoặc chỉ ra hàm số này là đơn điệu. Để chỉ ra hàm số f có một trong các tính chất đó ta làm như sau: lấy hai số phân biệt $a, b > 0$, ta cần so sánh $f(a), f(b)$.

Từ phương trình ban đầu ta được

$$f(x+f(a))=af(ax+1), \forall x \in (0;+\infty)$$

$$f(y+f(b))=bf(by+1), \forall y \in (0;+\infty)$$

Ta sẽ chọn x, y sao cho

$$\begin{cases} x+f(a)=y+f(b) \\ 1+ax=1+by \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+f(b)-f(a) \\ 1+a(y+f(b)-f(a))=1+by \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+f(b)-f(a) \\ y=\frac{a(f(a)-f(b))}{a-b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b(f(a)-f(b))}{a-b} \\ y=\frac{a(f(a)-f(b))}{a-b} \end{cases} \quad (1)$$

Do $x, y > 0$ nên nếu ta có $a > b > 0$ thì việc chọn được $x, y > 0$ chỉ làm được khi $f(a) > f(b)$.

Từ phân tích ở trên ta thấy với $a > b > 0$. Khi đó nếu $f(a) > f(b)$ thì với cách chọn x, y như trong (1) ta được

$$\begin{cases} x + f(a) = y + f(b) \\ 1 + ax = 1 + by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x + f(a)) = f(y + f(b)) \\ f(1 + ax) = f(1 + by) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} af(1 + ax) = bf(1 + by) \\ f(1 + ax) = f(1 + by) \end{cases} \Rightarrow a = b \text{ vô lí.}$$

Do đó nếu $a > b$ thì $f(a) \leq f(b)$ (2).

Tiếp theo ta tính $f(1)$.

*) $f(1) > 1$, ta có $f(x + f(1)) = f(x + 1), \forall x \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f(x) = f(x + f(1) - 1) = f(x + m), \forall x \in (1; +\infty)$, trong đó $m = f(1) - 1 > 0$

$\Rightarrow f(x) = f(x + km), \forall x \in (1; +\infty), \forall k \in \mathbb{N}^*$ (3).

Với mỗi số thực $y > x$ thì tồn tại số nguyên dương k sao cho $x < y < x + km$, kết hợp với (2) và (3) ta có:

$f(x) \geq f(y) \geq f(x + km) \Rightarrow f(x) = f(y) = f(x + km) \Rightarrow f$ là hàm số hằng trên $(1; +\infty)$ điều này không xảy ra do phương trình ban đầu.

*) $f(1) < 1$ tương tự không thỏa mãn.

Do đó $f(1) = 1$.

Xét $y > 1$ và chọn $x = 1 - \frac{1}{y}$ thay vào phương trình ban đầu ta được

$$f\left(f(y) + 1 - \frac{1}{y}\right) = yf(y) \quad (4)$$

Nếu $yf(y) > 1 \Leftrightarrow f(y) - \frac{1}{y} + 1 > 1 \Rightarrow f\left(f(y) - \frac{1}{y} + 1\right) \leq f(1) = 1$ điều này mâu thuẫn với (4).

Nếu $yf(y) < 1 \Leftrightarrow f(y) - \frac{1}{y} + 1 < 1 \Rightarrow f\left(f(y) - \frac{1}{y} + 1\right) \geq f(1) = 1$ điều này mâu thuẫn với (4).

Suy ra $f(y) = \frac{1}{y}, \forall y > 1$, kết hợp với phương trình đã cho ta được nghiệm

là $f(y) = \frac{1}{y}, \forall y > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn phương trình đã cho.

41.(ELMO Shortlisted 2010) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = \max\{f(x), y\} + \min\{f(y), x\}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Phân tích lời giải

Khi liên quan đến kí hiệu $\max\{x, y\}, \min\{x, y\}$ ta nên chú ý đến đẳng thức sau

$$\max\{x, y\} = \frac{|x+y|+|x-y|}{2}, \min\{x, y\} = \frac{|x+y|-|x-y|}{2}$$

Dựa vào hai đẳng thức trên ta có thể viết lại phương trình ban đầu về dạng

$$f(x+y) = \frac{|f(x)+y|+|f(x)-y|}{2} + \frac{|f(y)+x|-|f(y)-x|}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Đổi vai trò của x cho y trong (1) thu được

$$f(y+x) = \frac{|f(y)+x|+|f(y)-x|}{2} + \frac{|f(x)+y|-|f(x)-y|}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x)+y|+|f(x)-y|}{2} + \frac{|f(y)+x|-|f(y)-x|}{2} = \frac{|f(y)+x|+|f(y)-x|}{2} \\ & + \frac{|f(x)+y|-|f(x)-y|}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-y| = |f(y)-x|, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Thay $x=y$ vào phương trình ban đầu ta được

$$f(2x) = \max\{f(x), x\} + \min\{f(x), x\}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(2x) = x + f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Trong (3) ta thay $y=2x$ và sử dụng (5) thu được

$$|f(x)-2x| = |f(2x)-x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-2x| = |f(x)+x-x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-2x| = |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-2x)^2 = f(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x(f(x)-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Từ (5) ta có $f(x)=x, \forall x \neq 0$. Tiếp theo ta tính $f(0)$. Xét $x \neq 0$, thay $y=-x$ vào phương trình ban đầu thu được

$$f(0+0) = \max\{x, -x\} + \min\{x, x\}, \forall x \neq 0$$

$\Rightarrow f(0)=0$, kết hợp với $f(x)=x, \forall x \neq 0$ ta được $f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

7. BÀI TẬP ÁP DỤNG

42.(TST VietNam 2014) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m, \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{Z}.$$

43.(IMO 2015) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

44.(IMO 2013) Ký hiệu $\mathbb{Q}_{>0}$ là tập hợp các số hữu tỷ dương. Cho hàm số $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- a) $f(x)f(y) \geq f(xy), \forall x, y \in \mathbb{Q}_{>0};$
- b) $f(x+y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}_{>0};$
- c) Tồn tại số hữu tỉ $a > 1$ sao cho $f(a) = a$.

Chúng minh rằng $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

45.(ELMO Shortlisted 2013) Tìm tất cả các hàm số toàn ánh $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau

$$nf(f(n)) = f(n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

46.(Czech – Polish - Slovakia 2012) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) - f(x) = (x + f(y))^4 - x^4, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

47.(EGMO 2012) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

48.(Iran MO 2015) Chứng minh rằng không tồn tại các hàm số $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + g(y)) - f(x^2) + g(y) - g(x) \leq 2y, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) \geq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

49.(Iran MO 2013) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(0) \in \mathbb{Q}, f(x + f(y)^2) = f(x+y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

50.(ELMO Shortlisted 2013) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y), f(x^{2013}) = f(x)^{2013}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

51.(Iran TST 2014) Tìm tất cả hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y), \forall x, y > 0$$

52.(ELMO Shortlisted 2012) Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x)f(y)f(x+y) = f(xy)(f(x)+f(y)), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

53.(Iran TST 2013) Cho hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(m) + f(n) + f(f(m^2 + n^2)) = 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Giả sử tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(a) - f(b) = 3$. Chứng minh tồn tại các số nguyên $c, d \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(c) - f(d) = 1$.

54.(ELMO Shortlisted 2011) Tìm tất cả hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện nếu $a > b > c > d > 0$ và $ad = bc$ thì

$$f(a+d) + f(b-c) = f(a-d) + f(b+c)$$

55.(France TST 2007) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x - y + f(y)) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

56.(Turkey NO 1995) Tìm tất cả các hàm số toàn ánh $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(m) \mid f(n) \text{ khi và chỉ khi } m \mid n \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}^*$$

57.(Romania TST 1997) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

58.(Macedonia MO 2006) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

59.(British MO 2009) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

60.(India 2005) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

61.(India 2015) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

62.(USA MO 2000) Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

63. (CZech 2006). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Z}.$$

64.(Rumani 1988). Cho $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là một toàn ánh và $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là một đơn ánh sao cho với mọi số nguyên dương n ta có $f(n) \geq g(n)$. Chứng minh rằng $f = g$.

65.(IMO Shortlist 1995). Chứng minh rằng tồn tại một và chỉ một hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi số nguyên dương m, n ta có:

$$f(m + f(n)) = n + f(m + 95).$$

Tính tổng $\sum_{k=1}^{19} f(k)$.

66.(Olimpiad Áo – Balan 1997). Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với mọi số nguyên x, y ta có $f(x + f(y)) = f(x) - y$.

67.(Morocco 2011). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x)), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

68.(IMO Shortlist 2007). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + f(y), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}^+.$$

69.(Macedonia NMO 2007). Cho n là một số tự nhiên chia hết cho 4. Xác định số song ánh $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho:

$$f(j) + f^{-1}(j) = n+1, \text{ với mọi } j = 1, 2, \dots, n.$$

70.(APMO 1989). Cho hàm số f tăng thực sự, nhận giá trị thực trên tập các số thực. Giả sử tồn tại hàm ngược f^{-1} . Tìm tất cả các hàm số f như thế sao cho $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$, với mọi số thực x .

71.(Shortlist 1996). Cho U là một tập hợp hữu hạn và cho f, g là các toàn ánh từ U vào U . Đặt

$$S = \{\omega \in U : f(f(\omega)) = g(g(\omega))\}, T = \{\omega \in U : f(g(\omega)) = g(f(\omega))\},$$

và giả sử $U = S \cup T$. Chứng minh rằng với $\omega \in U$, $f(\omega) \in S$ khi và chỉ khi $g(\omega) \in S$.

72.(IMO Shortlist 2009) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \text{ với mọi số thực } x \text{ và } y.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] PGS. TS Vũ Dương Thụy và ThS Nguyễn Văn Nho, *40 năm Olimpia toán học quốc tế*, NXB Giáo dục 2001.
- [2] Nguyễn Trọng Tuấn, *Bài toán hàm số qua các kì thi Olimpiad*, NXB Giáo dục 2004.
- [3] B.J.Venkatachala, *Functional Equations A Problem Solving Approach*, 2003.
- [4] Arthur Engel, *Problem - Solving Strategies*, Springer, Verlag, New York, 1998.
- [5] J. Aczel, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York, 1966.
- [6] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, NXB Giáo dục 2001.
- [7] Các trang website: mathlinks.ro, mathscope.org

Phần 3. PHẦN KẾT LUẬN

1. Những kết luận quan trọng nhất về nội dung, ý nghĩa khi thực hiện chuyên đề

Trong chuyên đề “Phương trình hàm qua các kì thi olympic toán” chúng tôi đã đưa ra ứng dụng quan trọng nhất của một số dạng toán phương trình hàm như phương trình hàm Cauchy, phương trình hàm sử dụng tính đơn ánh, toàn ánh và song ánh, phương trình hàm sử dụng tính chất số học, bất phương trình hàm... và một số ứng dụng khác. Chuyên đề có phân tích khá đầy đủ và chi tiết phương pháp và cách thức áp dụng các kiến thức liên quan trong việc giải các bài toán, đặc biệt trong một số bài sử dụng tính chất số học. Chuyên đề này chúng tôi cũng đã cập nhật và tổng hợp những dạng toán mới nhất trong các kì thi Olympiad của các nước, khu vực và quốc tế về chủ đề phương trình hàm. Hệ thống các bài tập đưa ra theo thứ tự tăng dần độ khó để người đọc thấy được ứng dụng đặc biệt cũng như hướng tư duy có liên quan đến vận dụng kiến thức cũng như kết hợp các thao tác tư duy khác nhau để giải toán. Trong chuyên đề này có những bài tập rất khó để đưa ngay ra được hướng giải mà phải trong quá trình đặc biệt hóa bài toán, tính toán ở các tình huống đơn giản, đồng thời thông qua các thao tác tư duy đó giúp giáo viên định hướng tương đối rõ ràng cách giải cho học sinh. Các bài tập có lời giải là những bài tập đặc trưng nhất cho các dạng toán về phương trình hàm trong các kì thi gần đây và đa số trong các bài tập này là các bài tập khó hoặc rất khó (theo ý kiến của tác giả), các bài tập này phù hợp với những buổi dạy về phương trình hàm cho học sinh đội tuyển dự thi học sinh giỏi quốc gia. Trong phần bài tập áp dụng (không có lời giải) chúng tôi cũng đã chọn lọc từ tất cả các cuộc thi, các bài tập này có thể có những lời giải khác nhau. Hy vọng rằng chuyên đề “Phương trình hàm qua các kì thi olympic toán” này sẽ góp một phần nhỏ vào quá trình giảng dạy bồi dưỡng đội tuyển phân phương trình hàm và rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp để chuyên đề được hoàn thiện hơn.

2. Các đề xuất và kiến nghị được đề xuất, rút ra từ chuyên đề

Để giảng dạy có hiệu quả phân phương trình hàm giáo viên cần trang bị cho học sinh những kiến thức nền tảng của tất cả các mảng đại số, giải tích và số học có liên quan. Đối với học sinh lớp 10 giáo viên cần giảng dạy đầy đủ và chi tiết các chuyên đề về phương trình hàm đơn giản nhất để hình thành thói quen cũng như các thao tác tư duy của môn học, theo chúng tôi có thể chọn ra một số cuốn sách để giảng dạy như: phương trình hàm của tác giả Nguyễn Trọng Tuấn, Functional Equations của tác giả B J Venkatachala...

Để giảng dạy hiệu quả nhất phần phương trình hàm thì giáo viên nên chọn các ví dụ phù hợp nhất và phân tích chi tiết cho các em cách sử dụng các kiến thức liên quan, cách dự đoán tính chất đặc trưng và tại sao lại sử dụng các tính chất đó trong tình huống như vậy. Học sinh thường gặp khó khăn trong các bài toán phải sử dụng đến kiến thức về số học, đối với các dạng toán này giáo viên cần hệ thống những kiến thức số học nào hay gặp nhất trong các bài toán về phương trình hàm và cần trình bày cho các em các hàm số học đặc trưng cũng như các tính chất số học của các hàm số này.

KẾT THÚC CHUYÊN ĐỀ

Vấn đề mới/cải tiến chuyên đề đặt ra và giải quyết so với các chuyên đề trước đây (ở trong nhà trường hoặc trong tỉnh hoặc trên toàn quốc):

Chuyên đề này được hình thành trong suốt những năm giảng dạy phần phương trình hàm cho các lớp chuyên toán: nắm được điểm mạnh và điểm yếu của học sinh đồng thời xây dựng được hệ thống bài tập theo các cấp độ khác nhau trong từng giai đoạn học tập của học sinh. Tôi có thể khẳng định rằng việc giảng dạy tốt phần phương trình hàm sẽ có tác dụng tốt đối với việc bồi dưỡng học sinh giỏi dự thi các cấp. Chuyên đề này cũng được kế thừa và phát huy tốt nhất so với các chuyên đề cùng về chủ đề này, đồng thời chuyên đề này cũng đã đưa ra hệ thống bài tập tương đối cập nhật của các kì thi học sinh giỏi trên thế giới và đa số là các bài tập khó và rất hay. Cách giải quyết vấn đề trong chuyên đề này được đưa ra theo phương hướng cũng như yêu cầu đặt ra trong các kì thi học sinh giỏi những năm gần đây.